



## RESOLUÇÃO GERAL DOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

### VESTIBULAR UFPR 2009 (2ª FASE) – PROVA DE MATEMÁTICA

“Estamos diante de um exemplo de prova!”

A afirmação acima, feita pelo prof. Adilson, sintetiza a nossa impressão sobre a prova.

Mais uma vez o Departamento de Matemática da UFPR superou as limitações técnicas da prova como tempo e quantidade de questões com uma prova de qualidade, bem distribuída, enunciados impecáveis e que, com certeza, vai premiar os alunos que estudaram com seriedade.

Nesse momento, juntamos nossa satisfação com as dos alunos com os quais já conversamos. Temos a certeza de que a prova de matemática constituirá um elemento precioso para sua aprovação.

Na seqüência, colocamos a relação dos assuntos abordados que, na sua diversidade, consolidam as observações acima, além do mérito de questões cuja resolução admitia mais de um método, o que também qualifica uma prova com a função de aferir conhecimento.

Parabéns à Comissão!

Segue abaixo a distribuição dos assuntos:

**Questão 01:**

Teorema de Pitágoras  
Lei dos cosenos  
Relação fundamental

**Questão 02:**

Lei de formação de uma função  
Função quadrática  
Máximo da função

**Questão 03:**

Função racional  
Tendência (idéia)

**Questão 04:**

Soma dos termos da P.A.  
Termo geral da P.A.

**Questão 05:**

Ponto médio de segmento (plano cartesiano)  
Equação reduzida da circunferência  
Intersecção da circunferência com eixos coordenados

**Questão 06:**

Função exponencial  
Análise de gráfico  
Logaritmo (definição)

**Questão 07:**

Probabilidades (condicional)

**Questão 08:**

Volume do cilindro  
Área total do cilindro  
Volume do cubo

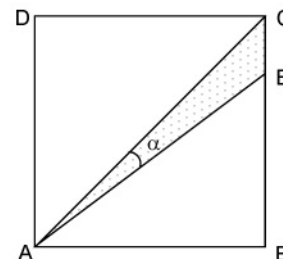
**Questão 09:**

Números complexos (potência e conjugado)  
Polinômios (teorema da decomposição)  
Equações algébricas (relações de Girard)  
Binômio de Newton

**Questão 10:**

Sistemas de equações lineares (resolução)

01 - A figura ao lado mostra um quadrado ABCD no qual os segmentos BC e EC medem 4 cm e 1 cm, respectivamente.



### RESOLUÇÃO

a) Calcule o perímetro do triângulo de vértices A, E e C.

Teorema de Pitágoras no triângulo ABE:

$$(AE)^2 = (AB)^2 + (BE)^2$$

$$(AE)^2 = 4^2 + 3^2$$

$$(AE)^2 = 25$$

$$AE = 5 \text{ cm}$$

Diagonal AC do quadrado ABCD:

$$AC = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Perímetro do triângulo AEC:

$$2p = AE + CE + AC$$

$$2p = 5 + 1 + 4\sqrt{2}$$

$$2p = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$2p = 2 \cdot (3 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$$

b) Calcule o seno e o cosseno do ângulo  $\alpha$ .

Lei dos Cossenos no triângulo ACE

$$(CE)^2 = (AC)^2 + (AE)^2 - 2 \cdot AC \cdot AE \cdot \cos \alpha$$

$$1^2 = (4\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 5 \cos \alpha$$

$$40\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 56$$

$$\cos \alpha = \frac{56}{40\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

Relação fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \frac{98}{100} = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{2}{100}$$

$$\text{sen} \alpha = \frac{\pm\sqrt{2}}{10}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \rightarrow \text{sen} \alpha > 0 \rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

- 02 - Para atrair novos clientes, um supermercado decidiu fazer uma promoção reduzindo o preço do leite. O gerente desse estabelecimento estima que, para cada R\$ 0,01 de desconto no preço do litro, será possível vender 25 litros de leite a mais que em um dia sem promoção. Sabendo que, em um dia sem promoção, esse supermercado vende 2600 litros de leite ao preço de R\$ 1,60 por litro:

### RESOLUÇÃO

- a) qual é o valor arrecadado por esse supermercado com a venda de leite em um dia sem promoção?

O valor arrecadado,  $V$ , é obtido pela multiplicação da quantidade de litros de leite vendida pelo preço de cada litro:

$$V = 2\,600 \cdot 1,60$$

$$V = 4\,160,00$$

O valor arrecadado é igual a R\$ 4.160,00.

- b) qual será o valor arrecadado por esse supermercado com a venda de leite em um dia, se cada litro for vendido por R\$ 1,40?

O preço do litro de leite, sem promoção, é igual R\$ 1,60. Se para cada centavo de desconto a quantidade vendida aumenta em 25 litros, então o valor arrecadado  $V$ , em reais, é uma função do desconto  $x$ , em reais, dado por:

$$V(x) = (2\,600 + 25 \cdot x \cdot 100) \cdot (1,60 - x)$$

$$V(x) = -2500x^2 + 1400x + 4160, \text{ com } 0 \leq x \leq 1,60$$

Se cada litro é vendido a R\$ 1,40, o desconto é igual a R\$ 1,60 – R\$ 1,40 = R\$ 0,20. Assim, o valor arrecadado é igual a:

$$V(0,20) = -2500 \cdot (0,20)^2 + 1400 \cdot 0,20 + 4160$$

$$V(0,20) = -100 + 280 + 4160$$

$$V(0,20) = 4340$$

O valor arrecadado é igual a R\$ 4.340,00.

- c) qual é o preço do litro de leite que fornece a esse supermercado o maior valor arrecadado possível? De quanto é esse valor arrecadado?

O valor arrecadado  $V(x)$  é máximo quando  $x$  é a abscissa do vértice da parábola que representa graficamente a função quadrática. Logo:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{1400}{2 \cdot (-2500)} = \frac{7}{25}$$

$$x_v = 0,28$$

O valor arrecadado é máximo quando o desconto por litro de leite é igual a R\$ 0,28, ou seja, o preço de venda de cada litro é igual a R\$ 1,32.

Substituindo  $x = 0,28$  na função, obtemos o valor arrecadado máximo:

$$V(0,28) = -2500 \cdot (0,28)^2 + 1400 \cdot 0,28 + 4160$$

$$V(0,28) = -196 + 392 + 4160$$

$$V(0,28) = 4356$$

Portanto, o valor arrecadado máximo é igual a R\$ 4.356,00.

- 03 - Uma fábrica de produtos químicos possui um sistema de filtragem do ar que é ligado automaticamente toda vez que a quantidade de poluentes no ar atinge certo nível previamente estabelecido. Sabe-se que a quantidade  $Q(t)$  de poluentes no ar dessa fábrica, depois de ligado o sistema de filtragem, é dada em função do tempo pela expressão:

$$Q(t) = \frac{10t + 750}{t + 15}$$

sendo a quantidade  $Q(t)$  medida em partículas por litro de ar e o tempo  $t$  em minutos.

### RESOLUÇÃO

- a) Qual a quantidade de poluentes existente no ar no instante inicial  $t = 0$  em que o sistema de filtragem foi acionado? Em quinze minutos depois da filtragem ter sido iniciada?

Para  $t = 0$ , temos:

$$Q(0) = \frac{10 \cdot 0 + 750}{0 + 15} = \frac{750}{15} = 50$$

Logo, no instante inicial, existem 50 partículas por litro de ar.

Para  $t = 15$ , temos:

$$Q(15) = \frac{10 \cdot 15 + 750}{15 + 15} = \frac{900}{30} = 30$$

Assim, após 15 minutos, existem 30 partículas por litro de ar.

- b) Esse sistema de filtragem está programado para desligar automaticamente no momento em que a quantidade de poluentes no ar atingir 12 partículas por litro de ar. Quantas horas esse sistema de filtragem precisa funcionar até atingir o ponto de desligamento automático?

Fazendo  $Q(t) = 12$ , temos:

$$12 = \frac{10t + 750}{t + 15}$$

$$12t + 180 = 10t + 750$$

$$2t = 570$$

$$t = 285 \text{ minutos}$$

Dividindo por 60, obtemos o tempo em horas:

$$\frac{285}{60} = 4,75\text{h}$$

Após 4,75 horas o sistema será desligado automaticamente.

- c) Encontre constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tais que  $Q(t) = a + \frac{b}{t+c}$ , examinando essa expressão, justifique a seguinte afirmação: *o sistema de filtragem dessa fábrica não é capaz de reduzir a quantidade de poluentes no ar para valores abaixo de 10 partículas por litro de ar.*

$$Q(t) = \frac{10t + 750}{t + 15}$$

$$Q(t) = \frac{10t + 150 + 600}{t + 15}$$

$$Q(t) = \frac{10 \cdot (t + 15) + 600}{t + 15}$$

$$Q(t) = 10 + \frac{600}{t + 15}$$

Comparando com a expressão apresentada, concluímos que  $a = 10$ ,  $b = 600$  e  $c = 15$ .

Justificativa da afirmação:

A variável  $t$  assume apenas valores não negativos. A expressão  $\frac{600}{t+15}$  é positiva para qualquer  $t$  não negativo. Logo, a quantidade de partículas por litro de ar não pode ser menor que 10:

$$t \geq 0$$

$$t + 15 > 0$$

$$\frac{1}{t+15} > 0$$

$$\frac{600}{t+15} > 0$$

$$10 + \frac{600}{t+15} > 10$$

$$Q(t) > 10$$

À medida que o valor de  $t$  aumenta, a expressão  $\frac{600}{t+15}$  diminui, de modo que podemos torná-la tão pequena quanto queiramos, atribuindo valores suficientemente grandes para  $t$ . A conclusão é de, a medida que  $t$  aumenta,  $\frac{600}{t+15}$  tende a zero. Portanto, o valor limite da quantidade de partículas por litro de ar é igual a 10.

04 - Considere a seguinte tabela de números naturais. Observe a regra de formação das linhas e considere que as linhas seguintes sejam obtidas seguindo a mesma regra.

1												
2	3	4										
3	4	5	6	7								
4	5	6	7	8	9	10						
5	6	7	8	9	10	11	12	13				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

### RESOLUÇÃO

a) Qual é a soma dos elementos da décima linha dessa tabela?

As quantidades de elementos de cada linha formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é igual a 1 ( $Q_1 = 1$ ) e cuja razão é igual a 2 ( $R = 2$ ). Logo, a quantidade de elementos da 10ª linha é dada por:

$$Q_{10} = Q_1 + 9R$$

$$Q_{10} = 1 + 9 \cdot 2$$

$$Q_{10} = 19$$

Cada uma das linhas forma uma progressão aritmética cuja razão é 1 ( $r = 1$ ). A 10ª linha se inicia com o número 10 e possui 19 termos, então o último termo dessa linha é dado por:

$$a_{19} = a_1 + 18r$$

$$a_{19} = 10 + 18 \cdot 1$$

$$a_{19} = 28$$

Para encontramos a soma dos elementos da linha 10,  $S_{10}$ , basta fazer:

$$S_{10} = \left( \frac{10 + 28}{2} \right) \cdot 19$$

$$S_{10} = 19 \cdot 19 = 19^2$$

$$S_{10} = 361$$

b) Use a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética para mostrar que a soma dos elementos da linha  $n$  dessa tabela é  $S_n = (2n - 1)^2$ .

A quantidade de elementos da linha  $n$ , é dada por:

$$Q_n = Q_1 + (n - 1) \cdot R$$

Sabemos que  $Q_1 = 1$  e  $R = 2$ , então:

$$Q_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$Q_n = 2n - 1$$

A linha  $n$  é uma P. A. em que  $a_1 = n$ ,  $r = 1$  e a quantidade de termos é igual a  $2n - 1$ .

Logo, o último termo é dado por:

$$a_N = a_1 + (N - 1) \cdot r$$

$$a_N = n + [(2n - 1) - 1] \cdot 1$$

$$a_N = 3n - 2$$

Desta forma, a soma dos elementos da linha  $n$  é dada por:

$$S_n = \left[ \frac{n + (3n - 2)}{2} \right] \cdot (2n - 1)$$

$$S_n = (2n - 1) \cdot (2n - 1)$$

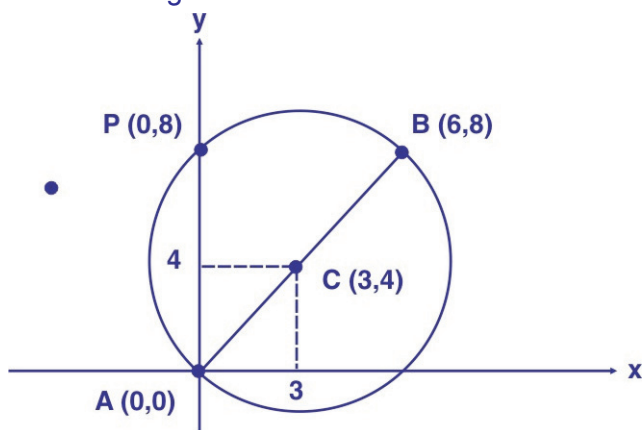
$$S_n = (2n - 1)^2$$

05 - São dados os pontos  $A = (0,0)$  e  $B = (6,8)$  no plano cartesiano  $Oxy$ .

### RESOLUÇÃO

- a) Escreva a equação reduzida da circunferência  $\alpha$  que tem centro no ponto médio do segmento  $AB$  e contém os pontos  $A$  e  $B$ .

Observe a figura:



O ponto  $C$  é centro da circunferência e ponto médio do segmento de extremidades  $A$  e  $B$ .

Logo:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 8}{2} = 4$$

O raio tem medida igual a 5, pois  $AC = 5$ .

A equação reduzida da circunferência é dada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

- b) Encontre as coordenadas do ponto  $P$ , distinto de  $A$ , no qual a circunferência  $\alpha$  intercepta o eixo  $y$ .

Substituindo  $x = 0$  na equação da circunferência, temos:

$$(0 - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$$

$$9 + (y - 4)^2 = 25$$

$$(y - 4)^2 = 16$$

$$y - 4 = 4 \text{ ou } y - 4 = 0$$

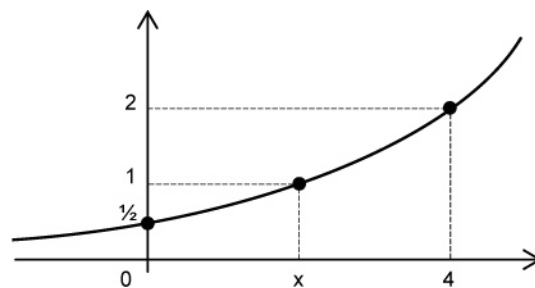
$$y = 8 \quad \text{ou } y = 0 \text{ (não convém)}$$

Portanto,  $P(0,8)$ .

06 - O gráfico ao lado corresponde a uma função exponencial da forma

$$f(x) = 2^{ax+b}$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes e  $x \in \mathbb{R}$ .



### RESOLUÇÃO

a) Calcule os valores  $a$  e  $b$  da expressão de  $f(x)$  que correspondem a esse gráfico.

Para  $x = 0$ , temos  $f(0) = 1/2$ , então:

$$f(0) = 2^{\frac{1}{2} \cdot 0 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$2^b = 2^{-1}$$

$$b = -1$$

Para  $x = 4$ , temos  $f(4) = 2$ , então:

$$f(4) = 2^{a \cdot 4 + (-1)} = 2$$

$$2^{4a-1} = 2^1$$

$$4a - 1 = 1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

b) Calcule o valor de  $x$  para o qual se tem  $f(x) = 1$ .

$$f(x) = 2^{\frac{1}{2}x - 1}$$

$$1 = 2^{\frac{1}{2}x - 1}$$

$$2^0 = 2^{\frac{1}{2}x - 1}$$

$$0 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$x = 2$$

c) Dado  $k > 0$  qualquer, mostre que o ponto  $x = \log_2(4k^2)$  satisfaz a equação  $f(x) = k$ .

$$f(x) = k$$

$$2^{\frac{1}{2}x - 1} = k$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}x}}{2^1} = k$$

$$2^{\frac{1}{2}x} = 2k$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}x}\right)^2 = (2k)^2$$

$$2^x = 4k^2$$

$$x = \log_2(4k^2)$$

07 - Na central de atendimento ao cliente de uma companhia telefônica, 60% dos funcionários são do sexo feminino. Analisando os relatórios de desempenho de todos os funcionários que trabalham nessa central (homens e mulheres), chegou-se às seguintes conclusões:

- i. 55% dos problemas relatados pelos clientes são resolvidos na primeira ligação, quando o cliente é atendido por uma funcionária (mulher).
- ii. 60% dos problemas relatados pelos clientes são resolvidos na primeira ligação, quando o cliente é atendido por um funcionário (homem).

Quando se faz uma ligação para essa central de atendimento, o sistema designa, ao acaso, um atendente que tentará resolver o problema apresentado pelo cliente.

### RESOLUÇÃO

a) Qual a probabilidade de esse atendente resolver o problema do cliente na primeira ligação?

Considere as seguintes probabilidades:

- $p(M) = 60\%$ : a probabilidade de a ligação ser atendida por uma mulher;
- $p(H) = 40\%$ : a probabilidade de a ligação ser atendida por um homem;
- $p(R/M) = 55\%$ : a probabilidade de o problema relatado ser resolvido na 1ª ligação, quando o cliente é atendido por uma mulher;
- $p(R/H) = 60\%$ : a probabilidade de o problema relatado ser resolvido na 1ª ligação, quando o cliente é atendido por um homem.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}p(R) &= p(M \text{ e } R) + p(H \text{ e } R) \\p(R) &= p(M) \cdot p(R/M) + p(H) \cdot p(R/H) \\p(R) &= 60\% \cdot 55\% + 40\% \cdot 60\% \\p(R) &= 33\% + 24\% \\p(R) &= 57\%\end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de o atendente resolver o problema do cliente na 1ª ligação é igual a 57%.

b) Qual é a probabilidade de o atendente ter sido um homem, sabendo que o problema foi resolvido na primeira ligação?

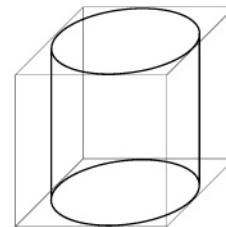
$$p(H/R) = \frac{p(H \text{ e } R)}{p(R)}$$

$$p(H/R) = \frac{24\%}{57\%} = \frac{24}{57} = \frac{8}{19}$$

$$p(H/R) \cong 42,11\%$$

Portanto, a probabilidade de o atendente ter sido um homem, sabendo que o problema foi resolvido na 1ª ligação é aproximadamente igual a 42,11%.

08 - Um cilindro está inscrito em um cubo, conforme sugere a figura ao lado. Sabe-se que o volume do cubo é  $256 \text{ cm}^3$ .



### RESOLUÇÃO

a) Calcule o volume do cilindro.

$$V_{\text{ci}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{ci}} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot a$$

$$V_{\text{ci}} = \frac{\pi}{4} \cdot a^3$$

$$V_{\text{ci}} = \frac{\pi}{4} \cdot 256$$

$$V_{\text{ci}} = 64\pi \text{ cm}^3$$

b) Calcule a área total do cilindro.

$$S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$S_T = 2\pi r \cdot (h + r)$$

$$S_T = 2\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right)$$

$$S_T = \frac{3\pi}{2} a^2$$

Mas  $a^3 = 256 \rightarrow (a^3)^{\frac{2}{3}} = (2^8)^{\frac{2}{3}} \rightarrow a^2 = 2^{\frac{16}{3}} = 2^{\frac{15}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 32 \sqrt[3]{2}$ , então:

$$S_T = \frac{3\pi}{2} \cdot 32 \sqrt[3]{2}$$

$$S_T = 48\pi \sqrt[3]{2} \text{ cm}^2$$

09 - Considere os números complexos  $z = 1 + i$  e  $\bar{z} = 1 - i$ , sendo  $i = \sqrt{-1}$  a unidade imaginária.

### RESOLUÇÃO

a) Escreva os números  $z^3$  e  $\bar{z}^4$  na forma  $x + iy$ .

$$z^3 = (1 + i)^3$$

$$z^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 + i^3$$

$$z^3 = 1 + 3i - 3 - i$$

$$z^3 = -2 + 2i$$

$$\bar{z}^4 = (1 - i)^4$$

$$\bar{z}^4 = [(1 - i)^2]^2$$

$$\bar{z}^4 = [1^2 - 2i + i^2]^2$$

$$\bar{z}^4 = [-2i]^2$$

$$\bar{z}^4 = (-2)^2 \cdot i^2$$

$$\bar{z}^4 = -4 + 0i$$

b) Sabendo que  $z$ ,  $\bar{z}$  e 2 são raízes do polinômio  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , calcule os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Se  $z$ ,  $\bar{z}$  e 2 são raízes do polinômio  $P$ , e observando que o coeficiente do 3º grau é igual a 1, temos:

$$P(x) = (x - z) \cdot (x - \bar{z}) \cdot (x - 2)$$

$$P(x) = [x - (1 + i)] \cdot [x - (1 - i)] \cdot (x - 2)$$

$$P(x) = [(x - 1) + i] \cdot [(x - 1) - i] \cdot (x - 2)$$

$$P(x) = [(x - 1)^2 - i^2] \cdot (x - 2)$$

$$P(x) = [x^2 - 2x + 2] \cdot (x - 2)$$

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

Logo,  $x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$  e, pela identidade de polinômios, concluímos que:

$$a = -4, b = 6 \text{ e } c = -4$$

10 - Encontre a solução do sistema linear abaixo, utilizando o processo de escalonamento ou o processo de substituição de variáveis:

$$\begin{cases} -x + y + z + w = 1 \\ x - y + z + w = 0 \\ x + y - z + w = -1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

### RESOLUÇÃO

Subtraindo a 4ª equação da 2ª equação, temos:

$$w = -2$$

Adicionando a 1ª e a 2ª equações, e substituindo  $w = -2$ , temos:

$$2z + 2w = 1$$

$$2z + 2 \cdot (-2) = 1$$

$$2z = 5$$

$$z = \frac{5}{2}$$

Adicionando a 1ª e a 3ª equações, e substituindo  $w = -2$ , temos:

$$2y + 2w = 0$$

$$2y + 2 \cdot (-2) = 0$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Substituindo os valores encontrados de  $y = 2$  e  $z = \frac{5}{2}$  na 4ª equação, temos:

$$x - 2 + \frac{5}{2} = 2$$

$$x = 4 - \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Portanto, } s = \left\{ \left( \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; -2 \right) \right\}$$