IME 2011/2012 – MATEMÁTICA (OBJETIVA)

1. SEM RESPOSTA

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2.(ab+ac+bc)$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = a^2+b^2+c^2+2.\frac{2}{6}$$
$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{36}$$

ASSIM, SE a, b, c FOSSEM DIMENSÕES DOS LADOS DE UM PARALELEPÍPEDO RETO RETÂNGULO, O COMPRIMENTO DA DIAGONAL SERIA $\frac{1}{6}$. MAS A EQUAÇÃO $6x^3-5x^2+2x-3=0$ TEM 1, $\frac{-1+\sqrt{-71}}{12}$ E $\frac{-1-\sqrt{-71}}{12}$ COMO RAÍZES E ASSIM O PARALELEPÍPEDO NÃO EXISTE.

2. D

$$(C.A^t)^t = P^{-1}.B.P$$
$$\det(CA^t)^t = \det(P^{-1}B.P)$$
$$\det(C.A^t) = \det P^{-1}.\det B.\det P$$
$$\det C.\det A^t = \frac{1}{\det P}.\det B.\det P$$
$$\det C.\det A = \det B$$

COMO $\det A = -x$, TEMOS:

$$(4-x).-x = -3$$
$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ ou } x=3}$$

3. (C)

$P_0P_1 = 1 = \sqrt{1^2}$

$P_0P_2 = \sqrt{1^2 + 2^2}$

$P_0P_3 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$

$\vdots$

$P_0P_{24} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 24^2}$

COMO $C_n^2 = \frac{n^2 - n}{2}$, TEMOS QUE $n^2 = 2.C_n^2 + n$, PARA $n \geq 2$.

$P_0P_{24} = \sqrt{1 + 2.C_2^2 + 2 + 2.C_3^2 + 3 + \dots + 2.C_{24}^2 + 24}$

$P_0P_{24} = \sqrt{1 + 2 + 3 + \dots + 24 + 2.(C_2^2 + C_3^2 + \dots + C_{24}^2)}$

$P_0P_{24} = \sqrt{\left(\frac{1+24}{2}\right).24 + 2.C_{25}^3} = \sqrt{25.12 + 2.2300} = \sqrt{4900} = \boxed{70}.$

4. (C)

COMO $\operatorname{arcsen} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ENTÃO $\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{arcsen} y = \frac{\pi}{2}$ E $\operatorname{arcsen} z = \frac{\pi}{2}$, OU SEJA, $x = y = z = 1$.

ASSIM, $x^{100} + y^{100} + z^{100} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}} = 1 + 1 + 1 - \frac{9}{1+1+1} = \boxed{0}$

5. (E)

$$P = \frac{C_9^7}{C_{11}^7} = \frac{C_9^2}{C_{11}^4} = \frac{\frac{9.8}{2.1}}{\frac{11.10.9.8}{4.3.2.1}} = \boxed{\frac{6}{55}}$$

6. B

$z^3 = 1$

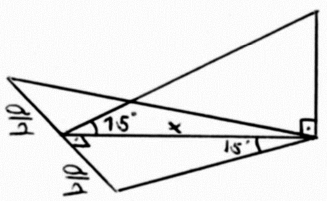
$z_k = cis\left(\frac{2\pi.k}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2)$

Assim, $w = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $w^2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ e $w^3 = cis\left(\frac{6\pi}{3}\right) = 1$

$(1-w)^6 = \left[(1-w)^3\right]^2 = \left[1 - 3w + 3w^2 - w^3\right]^2 = \left[-3w + 3w^2\right]^2 =$

$= 9.\left(cis\frac{4\pi}{3} - cis\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 9.\left(-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.i\right)^2 = 9.3.i^2 = -27 \in]-30; -10]$.

7. A



$$\begin{cases} tg\,15° = \frac{h}{x} \\ tg\,15° = \frac{a}{2x} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{2.tg\,15°} \text{ e } h = \frac{a}{2}$$

$V = \frac{1}{3}.12.\frac{a.x}{2}.h = 2a.x.h$

$V = 2.a.\frac{a}{2.tg\,15°}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{2.tg\,15°} = \frac{a^3}{2.tg\left(\frac{30°}{2}\right)}$

$V = \frac{a^3}{2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{1+\cos 30°}}} = \boxed{\frac{a^3}{2}.\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}}$

8. (D)

$$S_{FHCG} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABHFG}$$

$$2 \cdot S_{FHCG} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} - S_{FHCG}$$

$$3 \cdot S_{FHCG} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

SENDO $FC = 2a$ E $GH = 2b$, TEMOS:

$$3 \cdot 2 \cdot \frac{2a \cdot b}{2} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a \cdot b = \frac{m^2\sqrt{3}}{24}$$

MAS $a = b\sqrt{3}$ E ASSIM $b\sqrt{3} \cdot b = \frac{m^2\sqrt{3}}{24} \Rightarrow b^2 = \frac{m^2}{24} \Rightarrow a^2 = \frac{m^2}{8}$.

EQUAÇÃO DA ELIPSE: $\frac{x^2}{\frac{m^2}{8}} + \frac{y^2}{\frac{m^2}{24}} = 1 \Rightarrow \boxed{8x^2 + 24y^2 - m^2 = 0}$.

9. (D)

$$y = \text{sen}\,70^\circ \cdot \cos 50^\circ + \text{sen}\,260^\circ \cdot \cos 280^\circ$$

$$y = \text{sen}\,70^\circ \cdot \cos 50^\circ + (-\text{sen}\,80^\circ) \cdot \cos 80^\circ$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (\text{sen}\,120^\circ + \text{sen}\,20^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,160^\circ$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,20^\circ - \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\,20^\circ$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

10. A

$$x^2+4y^2-100=0 \Rightarrow y=\pm\left(25-\frac{1}{4}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

COMO $y' = \pm\frac{1}{2}\left(25-\frac{1}{4}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)$ E $y>0$, ENTÃO O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE À CURVA $x^2+4y^2-100=0$ NO PONTO $P(8,3)$ É $\frac{1}{2}\left(25-\frac{1}{4}8^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{8}{2}\right) = -\frac{2}{3}$ E SUA EQUAÇÃO É DADA POR $y-3=-\frac{2}{3}(x-8) \Rightarrow \boxed{2x+3y-25=0}$.

11. C

COMO OS COEFICIENTES SÃO RACIONAIS, ENTÃO $-\sqrt{n}$ TAMBÉM É RAIZ DA EQUAÇÃO $5x^3-3x^2-60x+36=0$.

- $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{5}$

$$\sqrt{x}-\sqrt{n}+x_3=\frac{3}{5} \Rightarrow x_3=\frac{3}{5}$$

$\frac{3}{5}$	5	−3	−60	36
	5	0	−60	0

$$5x^2-60=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{12}$$

ASSIM, $n=12$ E $10\le n<15$.

12. A

$$\log_5 18 = \frac{\log 18}{\log 5} = \frac{\log(2\cdot 3^2)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 2+2\log 3}{\log 10-\log 2} = \boxed{\frac{x+2y}{1-x}}$$

13. (C)

$$f(a) = \frac{a^2.(a-b).(a-c)}{(a-b)(a-c)} = a^2$$

$$f(b) = \frac{b^2.(b-c).(b-a)}{(b-c).(b-a)} = b^2$$

$$f(c) = \frac{c^2.(c-a).(c-b)}{(c-a).(c-b)} = c^2$$

ASSIM, SE $f(x) = \alpha.x^2 + \beta.x + \gamma$, TEMOS:

$$\begin{cases} \alpha.a^2 + \beta.a + \gamma = a^2 \\ \alpha.b^2 + \beta.b + \gamma = b^2 \\ \alpha.c^2 + \beta.c + \gamma = c^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2.}$$

14. (C)

SENDO x E y, RESPECTIVAMENTE, OS NÚMEROS DE ALUNOS COM 3 E 4 MATRÍCULAS, TEMOS:

$3.x + 4.y = 20$

ASSIM, $x = 6$ E $y = 2$ É A SOLUÇÃO PARA A QUAL y É MÍNIMO

15. (E)

COMO $27209 = 7.13^2.23$, ENTÃO $x!$ COM $x \geq 26$ É MÚLTIPLO DE 27209. ASSIM, COMO $0! = 1! = 1$, O CONJUNTO G POSSUI 25 ELEMENTOS.