COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A prova atingiu vários aspectos positivos, como instrumento de aferição de conhecimento. A abrangência, a criatividade e a originalidade foram mantidas por meio de questões que, sem dúvida alguma, selecionarão os candidatos mais bem preparados.

A registrar a ausência de alguns tópicos importantes: funções exponenciais e logarítmicas, matrizes, determinantes, números complexos e binômio de Newton.

Embora a prova pudesse apresentar um grau de dificuldade elevado, acreditamos que foi adequada para a seleção de candidatos em uma segunda fase.

Professores de Matemática do Curso Positivo.

01 - Atribui-se ao matemático De Moivre uma lenda sobre um homem que previu sua própria morte. As condições da previsão estão dentro de uma narrativa que modela grosseiramente vários aspectos da realidade. Por exemplo, dormir 24 horas seguidas equivale a morrer, e assim por diante. A lenda é a seguinte: um homem observou que cada dia dormia 15 minutos a mais que no dia anterior. Se ele fez essa observação exatamente após ter dormido 8 horas, quanto tempo levará para que ele durma 24 horas seguidas, não mais acordando?

Comentário:

Considerando que 15 minutos = 0,25 horas, temos:

1º dia dormiu 8,25h

2º dia dormiu 8,5h

3º dia dormiu 8,75h

. . . .

nº dia dormiu 24h

portanto, temos a PA

(8,25; 8,5; 8,75; . . . . .; 24)

aplicando a fórmula do termo geral

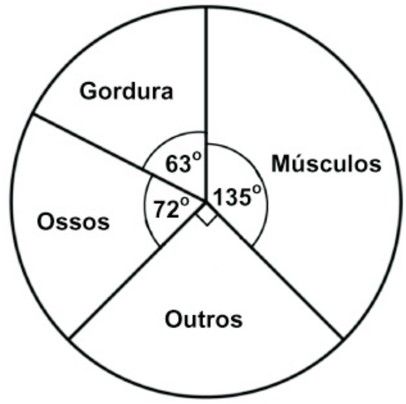
$a_n = a_1 + (n - 1).r$

em que r = 0,25

$24 = 8,25 + (n - 1).0,25 \Rightarrow 15,75 = (n - 1).0,25 \Rightarrow 63 = n - 1 \therefore n = 64$

Resposta: **No 64º dia após a observação ele dormirá 24h.**

02 - O gráfico de setores ao lado ilustra como a massa de um homem de 80 kg está distribuída entre músculos, gordura, ossos e outros. O ângulo de cada setor está mostrado em graus. Com base nesse gráfico, responda às perguntas:



a) Quantos quilogramas de músculos esse homem possui?

Comentário:

a) Regra de três, vem

$$80\text{ kg} \longrightarrow 360^\circ$$
$$x\text{ kg} \longrightarrow 135^\circ$$

$$x = \frac{80 \,.\, 135}{360} \therefore x = 30$$

Resposta: **A pessoa terá 30kg de músculos.**

b) Juntos, gordura e ossos representam que percentual da massa desse homem?

Comentário:

b) gordura e ossos representam um ângulo de $63^\circ + 72^\circ = 135^\circ$

Pela regra de três

$$100\,\% \longrightarrow 360^\circ$$
$$y\,\% \longrightarrow 135^\circ$$

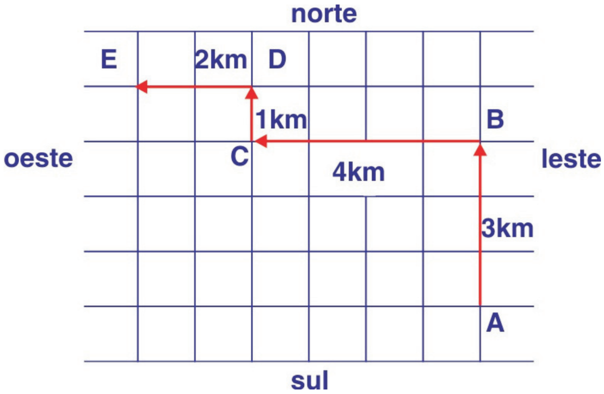
$$y = \frac{100 \,.\, 135}{360}\ y = 37{,}5$$

Resposta: **O percentual de gordura e ossos é 37,5%.**

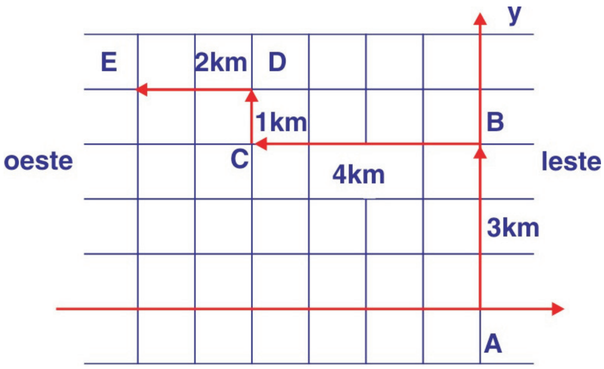
03 - Durante um passeio, uma pessoa fez o seguinte trajeto: partindo de um certo ponto, caminhou 3 km no sentido norte, em seguida 4 km para o oeste, depois 1 km no sentido norte novamente, e então caminhou 2 km no sentido oeste. Após esse percurso, a que distância a pessoa se encontra do ponto de onde iniciou o trajeto?

Comentário:

Do enunciado, podemos assinalar o trajeto



adotando um sistema cartesiano com origem em A

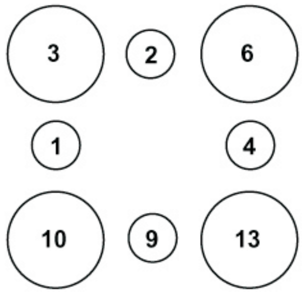


Podemos escrever que A(0, 0); B(0, 3); C(– 4, 3); D(– 4, 4) e E(–6, 4). Assim, a distância entre o ponto inicial (A) e o ponto final(E) é

$$d_{EA} = \sqrt{(-6-0)^2 + (4-0)^2} \Rightarrow d_{EA} = \sqrt{52} \therefore d_{EA} = 2\sqrt{13}$$

Resposta: **A pessoa se encontra a uma distância do ponto inicial igual a $2\sqrt{13}$ km.**

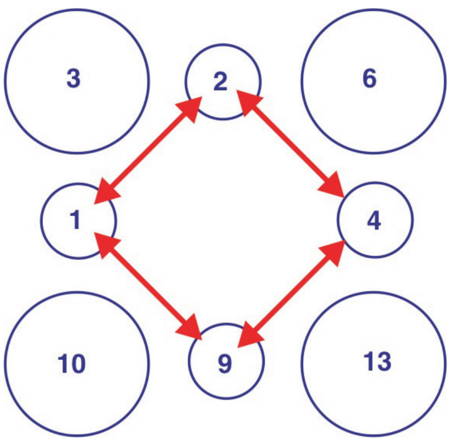
04 - No diagrama abaixo, os números dos círculos grandes são obtidos a partir de uma determinada regra.



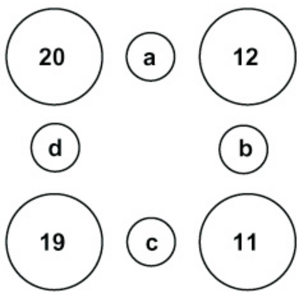
a) Descreva a regra pela qual os números dos círculos grandes desse diagrama são obtidos.

Comentário:

O número de cada círculo grande é igual à soma dos dois círculos menores a ele adjacentes.



b) Sabendo-se que os números dos círculos maiores do diagrama abaixo são obtidos pela mesma regra do diagrama anterior, determine a, b, c, d, de modo que esses números sejam inteiros positivos.



Comentário:

Usando a regra anterior, temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & & & & + & d & = & 20 \\ a & + & b & & & & & = & 12 \\ & & b & + & c & & & = & 11 \\ & & & & c & + & d & = & 19 \end{array}$$

Observe que, somando-se a primeira com a terceira equação, obtém-se a+b+c+d = 31 e somando a segunda com a quarta equação, obtém-se a mesma equação, logo o sistema, em IR, é possível e indeterminado.

Da primeira equação, podemos escrever: $d = 20 - a$

Da segunda equação, podemos escrever: $b = 12 - a$

Substituindo b na terceira equação, temos:

$$12 - a + c = 11 \;\therefore\; c = a - 1$$

Sendo que **a** é um número inteiro e positivo, podemos concluir que $1 < a < 12$. Daí conclui-se que os possíveis valores de a, b, c e d são dados pela tabela.

Resposta:

a	b	c	d
2	10	1	18
3	9	2	17
4	8	3	16
5	7	4	15
6	6	5	14
7	5	6	13
8	4	7	12
9	3	8	11
10	2	9	10
11	1	10	9

05 - Uma jarra de vidro em forma cilíndrica tem 15 cm de altura e 8 cm de diâmetro. A jarra está com água até quase a borda, faltando 1 cm de sua altura para ficar totalmente cheia.

a) Se uma bolinha de gude de 2 cm de diâmetro for colocada dentro dessa jarra, ela deslocará que volume de água?

Comentário:

Observando, em primeiro lugar, que

Volume total da jarra: $V_T = \pi.R^2.H = \pi.4^2.15 \therefore V_T = 240\pi$

Volume de água contida na jarra: $V_a = \pi.R^2.H = \pi.4^2.14 \therefore V_a = 224\pi$

Portanto, o volume de água para encher totalmente a jarra é 16π.

a) bolinha de gude: r = 1 cm

volume da bolinha: $v = \frac{4}{3}\pi.r^3 \therefore v = \frac{4}{3}\pi$

Resposta: O volume de água deslocada pela bolinha de gude é $\frac{4}{3}\pi$ cm^3.

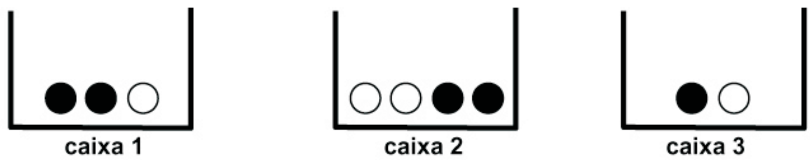
b) Quantas bolinhas de gude de 2 cm de diâmetro serão necessárias para fazer com que a água se desloque até a borda superior da jarra?

Comentário:

Seja n o número de bolinhas de gude, logo $16\pi = \frac{4}{3}\pi.n \Rightarrow n = 12$

Resposta: **Para deslocar a água até a borda serão necessárias 12 bolinhas de gude.**

06 - Considere três caixas contendo bolas brancas e pretas, conforme ilustra a figura.



Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 1 e colocada na caixa 2. Então, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 2 e colocada na caixa 3. Finalmente, uma bola é retirada aleatoriamente da caixa 3. Calcule a probabilidade de que essa última bola retirada seja branca.

Comentário:

$$\text{Caixa 1: } 3\begin{cases} 2 \text{ pretas} \\ 1 \text{ branca} \end{cases}$$

$$\text{Caixa 2: } 4\begin{cases} 2 \text{ pretas} \\ 2 \text{ brancas} \end{cases}$$

$$\text{Caixa 3: }\begin{cases} 1 \text{ preta} \\ 1 \text{ branca} \end{cases}$$

A probabilidade de a bola retirada da caixa 3 ser branca, representada por $p(B_3)$, é calculada levando-se em consideração quatro hipóteses:

$$p(B_3) = p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap P_2 \cap B_3) + p(P_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(P_1 \cap P_2 \cap B_3)$$

$$p(B_3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$$

$$p(B_3) = \frac{22}{45}$$

Resposta: **A probabilidade de que a última bola seja branca é igual a $\frac{22}{45}$.**

07 - 100 litros de uma solução contêm inicialmente 75% de álcool e 25% de água. Indiquemos por f(x) a concentração de água nessa solução após x litros da água serem removidos, isto é,

$$f(x) = \frac{\text{volume da água na solução após x litros da água serem removidos}}{\text{volume da solução após x litros da água serem removidos}}$$

a) Qual o valor de f(0)?

Comentário:

Em 100 litros da solução teremos: 75 litros de álcool e 25 litros de água. Se retirarmos x litros de água ($x \leq 25$), então, em $(100 - x)$ litros de solução, teremos 75 litros de álcool e $(25 - x)$ litros de água.

A concentração f(x) é

$$f(x) = \frac{25 - x}{100 - x} \ (0 \leq x \leq 25)$$

Resposta:

$$\mathbf{f(0) = \frac{25}{100} \therefore f(0) = 0{,}25 \text{ ou } f(x) = 25\%}$$

b) Obtenha a expressão de f(x) em termos de x.

Comentário:

$$\mathbf{f(x) = \frac{25 - x}{100 - x} \ (x \leq 25)}$$

08 - Suponha que a expressão P = 100 + 20 sen(2πt) descreve de maneira aproximada a pressão sanguínea P, em milímetros de mercúrio, de uma certa pessoa durante um teste. Nessa expressão, t representa o tempo em segundos. A pressão oscila entre 20 milímetros de mercúrio acima e abaixo dos 100 milímetros de mercúrio, indicando que a pressão sanguínea da pessoa é 120 por 80. Como essa função tem um período de 1 segundo, o coração da pessoa bate 60 vezes por minuto durante o teste.

a) Dê o valor da pressão sanguínea dessa pessoa em t = 0 s; t = 0,75 s.

Comentário:

Dado que $P = 100 + 20.\text{sen}(2\pi t)$

a) $t = 0 \Rightarrow P_0 = 100 + 20.\text{sen}(2\pi.0) = 100 + 20.0 \therefore P_0 = 100$

$$t = 0{,}75 \Rightarrow P = 100 + 20.\text{sen}(2\pi.0{,}75) = 100 + 20.\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$P = 100 + 20.(-1) \therefore P = 80$

Resposta: **A pressão sanguínea está em 100 por 80.**

b) Em que momento, durante o primeiro segundo, a pressão sanguínea atingiu seu mínimo?

Comentário:

b) A pressão atinge o seu mínimo se e somente se,

$$\text{sen}(2\pi t) = -1 \Rightarrow 2\pi t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ seg ou } t = 0{,}75 \text{ seg}$$

Resposta: **A pressão atinge o seu mínimo para t = 0,75 seg.**

09 - Uma caixa de papel em forma de bloco retangular está sendo projetada de modo a ter altura e comprimento de mesma medida e largura 3 cm maior que seu comprimento. Quais as dimensões dessa caixa para que seu volume seja 200 cm^3?

Comentário:

O volume da caixa é o volume de um paralelepípedo reto retangular de dimensões x cm, x cm e (x + 3) cm e volume igual a 200 cm^3.

Logo

$x^2 . (x + 3) = 200 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 200 = 0$

Analisando os divisores de 200, podemos observar que 5 é raiz da equação. Logo, aplicando a regra de Briot Rufini vem:

5	1	3	0	–200
	1	8	40	0

Portanto, tem-se a equação resultante

$x^2 + 8x + 40 = 0$

em que o $\Delta = 8^2 - 4.1.40 = -96$

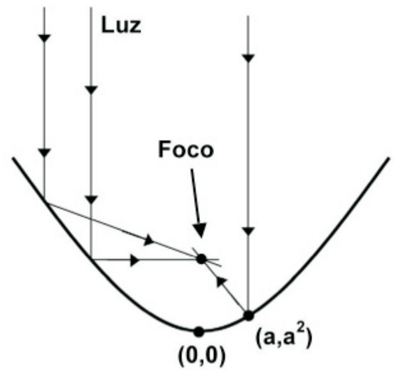
não existindo raízes reais.

Resposta: **As dimensões dessa caixa são 5 cm de altura, 5 cm de comprimento e 8 cm de largura.**

10 - Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo y), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a,a^2), serão refletidos na direção da reta

$$4ay + (1 - 4a^2)x = a.$$

Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em (1,1) e (2,4) se encontrarão.



Comentário:

Do enunciado a equação da reta que contém o raio refletido no ponto (a, a^2) é

$$4ay + (1 - 4a^2)x = a$$

Portanto:

no ponto (1,1) isto é, a = 1 a equação da reta é

$$4.1.y + (1 - 4.1^2)x = 1,$$

ou seja:

$$4y - 3x = 1 \text{ (I)}$$

No ponto (2, 4), isto é, a = 2 a equação da reta é

$$4.2.y + (1 - 4.2^2)x = 1,$$

ou seja:

$$8y - 15x = 2 \text{ (II)}$$

Formando o sistema

$\begin{cases} 4y - 3x = 1 \\ 8y - 15x = 2 \end{cases}$ resolvendo o sistema, temos:

$x = 0$ e $y = \dfrac{1}{4}$

Resposta: **O ponto em que os raios refletidos se encontram é $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.**