CURSO POSITIVO
Prepara melhor. Aprova mais.

COMENTÁRIO GERAL DOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

VESTIBULAR PUCPR 2010/2011

PROVA DE MATEMÁTICA

A prova de Matemática deste ano apresentou-se melhor do que as que foram elaboradas nos últimos cinco anos, pelo menos no que diz respeito a erros de gabarito e questões mal formuladas. Esta prática tão prejudicial aos candidatos não foi identificada nesta prova, felizmente. Considerando-se o universo de apenas 8 questões, a abrangência ficou naturalmente prejudicada. De qualquer maneira, os tópicos presentes foram relevantes e pertinentes, contribuindo para a esperada seleção dos candidatos mais bem preparados. Quanto à distribuição das questões, é possível identificar uma sensível valorização da Matemática Básica (questões de números 10 e 14), a presença de questões contextualizadas (números 12 e 13), bem como a presença de questões clássicas (números 09, 11, 15 e 16). Uma sugestão é a de que essa mescla, que contribui para o aumento na qualidade da prova, deva continuar nos próximos vestibulares.

Professores: Emerson, Luiz Antônio, Kolb e Adilson.

9. Considere a matriz quadrada **A** de ordem **"n"**, sendo **n** inteiro e positivo, definida por **A = (** a_{ij} **)** tal que:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, \text{para } i \neq j \\ a_{ij} = 2^{i+j}, \text{para } i = j \end{cases}$$

Calcule o determinante da matriz **A**.

A) 2^{n^2+2}

B) 2^{n^2+2n}

C) 2^{n^2+n}

D) 2^{n^2}

E) 2^{2n^2}

Resolução: De acordo com a lei de formação dos termos, a matriz é diagonal, pois os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos. Desta forma, o determinante é igual ao produto dos elementos que pertencem à diagonal principal, ou seja:

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot (\ldots) \cdot a_{nn}$

$\det(A) = 2^{1+1} \cdot 2^{2+2} \cdot 2^{3+3} \cdot (\ldots) \cdot 2^{n+n}$

$\det(A) = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot (\ldots) \cdot 2^{2n}$

$\det(A) = 2^{[2+4+6+(\ldots)+2n]}$

$\det(A) = 2^{2[1+2+3+(\ldots)+n]}$

$\det(A) = 2^{2 \cdot \left(\frac{1+n}{2}\right) \cdot n}$

$\det(A) = 2^{n^2+n}$

Resposta: c

10. Um **paralogismo** é um raciocínio falso mas que tem aparência de verdade. Há algumas demonstrações clássicas em que isso acontece. Considere a seguinte demonstração descrita em sete etapas:

I. Vamos supor a igualdade: $-1 = -1$

II. Na forma de fração: $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$

III. Extraindo a raiz quadrada: $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$

IV. Propriedade de radicais: $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$

V. Entretanto $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$

VI. Substituindo em IV $\frac{\sqrt{1}}{i} = \frac{i}{\sqrt{1}}$ ou $i^2 = 1$

VII. Igualando-se as relações de V e VI tem-se: $-1 = 1$

A respeito dessa demonstração, assinale a alternativa **CORRETA**:

A) A demonstração está incorreta e o erro está na etapa V, pois $i^2 = \pm 1$.

B) A demonstração está incorreta e o erro está na etapa II, pois não é correto expressar $-1 = \frac{1}{-1}$.

C) A demonstração está incorreta e o erro está na etapa V, pois a igualdade $i = \sqrt{-1}$ é absurda em qualquer conjunto numérico.

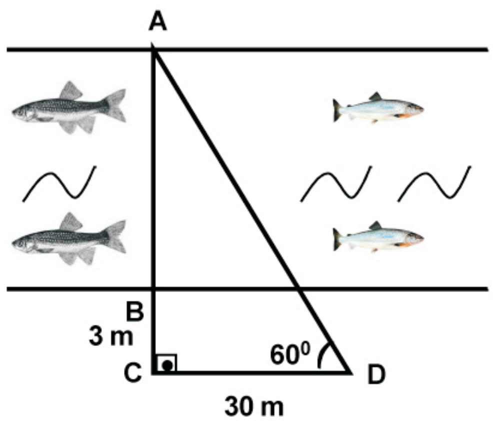
D) A demonstração não apresenta erros.

E) A demonstração está incorreta e o erro está na etapa IV, pois $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ só é válida se A > 0 e B > 0.

Resolução: A propriedade relativa a radicais, $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$, não se comporta bem para A< 0 ou B < 0. Por outro lado, é importante ressaltar que esta propriedade é válida também se A = 0 e B ≠ 0, por exemplo. Ou seja, não é apenas para A > 0 e B>0 que tal propriedade é válida.

Resposta: e

11. Para determinar a largura de um rio, um observador no ponto C visa um ponto fixo A na margem oposta. A partir do ponto C, ele se desloca perpendicularmente ao segmento AC percorrendo 30 m em linha reta e marca um ponto D. No ponto D, ele mede o ângulo $C\hat{D}A = 60^0$, conforme figura a seguir. Sabendo que a distância BC corresponde a 3 m e considerando tg 60^0 = 1,7, a largura do rio mede:



A) 52 m
B) 64 m
C) 72 m
D) 48 m
E) 88 m

Resolução: Sendo L a medida da largura do rio, utilizando a razão tangente no triângulo ACD, tem-se:

$$\text{tg } 60^o = \frac{L+3}{30}$$

$30 \,.\, \text{tg } 60^o = L + 3$

$30 \,.\, 1{,}7 = L + 3$

$L = 51 - 3$

$L = 48$ m

Resposta: d

12. Sérgio tem em seu bolso quatro chaves de mesmo formato e tamanho, apenas com os segredos diferentes. As chaves estão soltas e não é possível identificá-las pelo tato. Sérgio precisa abrir três fechaduras até chegar à sua sala. Faz, então, uma aposta com seu sócio Mariano:

- Aleatoriamente, vou tirar do meu bolso três chaves, uma a uma e, nesta mesma sequência, abrirei as três portas.

Mariano respondeu:

- Duvido! Se as três portas se abrirem com as chaves escolhidas, na mesma sequência, eu lhe pagarei um belo almoço!

A probabilidade de que Sérgio ganhe a aposta é igual a:

A) $\frac{1}{64}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{24}$
E) $\frac{1}{9}$

Resolução: Como são 4 chaves, a probabilidade de a primeira chave escolhida abrir a primeira porta é igual a 1/4. Tendo sido aberta a primeira porta, a probabilidade de a segunda porta ser aberta com a segunda chave é igual a 1/3. Se as duas primeiras portas foram abertas, a probabilidade de a terceira porta ser aberta com a terceira chave é igual a 1/2. Assim, a probabilidade de as três portas serem abertas é dada por:

$$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{24}$$

Resposta: d

13. Benedito contratou o projeto de uma cisterna para armazenar água da chuva, a ser construída sobre um terreno plano. Suas dimensões internas são as seguintes: 3 metros de largura, 5 metros de comprimento e 2 metros de altura. As paredes têm espessura de 20 cm e a cobertura é de material leve e removível. Um amigo fez as seguintes asserções:

I. Se a largura for aumentada em um metro e o comprimento for reduzido em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna aumentará em 2 m³, e a área externa das paredes será a mesma da estrutura original.
II. Se o comprimento for aumentado em um metro e a largura reduzida em um metro, a área externa das paredes será a mesma da estrutura original, mas a capacidade volumétrica da cisterna ficará reduzida a 80% da capacidade original.
III. Se a largura for aumentada em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna passará de 40 m³, e a área externa das paredes será inferior a 40 m².
IV. Se o comprimento for aumentado em um metro, a capacidade volumétrica da cisterna e a área externa das paredes aumentarão em 20%.

Assinale a alternativa **CORRETA**:

A) São verdadeiras apenas as asserções I e III.
B) São verdadeiras apenas as asserções I e II.
C) Somente a asserção IV é falsa.
D) Todas as asserções são verdadeiras.
E) Apenas a asserção III é falsa.

Resolução:

O volume da cisterna é dado por:

$V = 3m \,.\, 5m \,.\, 2m$

$V = 30\ m^3$

A cisterna assemelha-se a um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são 3,4 m, 5,4 m e 2 m, desconsiderando-se a base e a cobertura. Logo, para o cálculo da área total, apenas 4 faces devem ser consideradas.

A área total da cisterna é dada por:

$A = 2 \,.\, 3{,}4\ m \,.\, 2\ m + 2 \,.\, 5{,}4\ m \,.\, 2\ m$

$A = 35{,}2\ m^2$

I. Verdadeira

Com o aumento de um metro na largura e a redução de um metro no comprimento, o novo volume da cisterna será igual a:

$V = (3 + 1) \,.\, (5 - 1) \,.\, 2$

$V = 4 \,.\, 4 \,.\, 2$

$V = 32\ m^3$

Logo, o volume aumentará 2 m^3.

Neste caso, a área externa será dada por:

$A = 2 \,.\, (3{,}4 + 1) \,.\, 2 + 2 \,.\, (5{,}4 - 1) \,.\, 2$

$A = 2 \,.\, 4{,}4 \,.\, 2 + 2 \,.\, 4{,}4 \,.\, 2$

$A = 35{,}2\ m^2$

A área externa das paredes será a mesma da estrutura original.

II. Verdadeira

Se o comprimento for aumentado em um metro e a largura reduzida em um metro, o volume da cisterna será igual a:

$V = (3 - 1) \,.\, (5 + 1) \,.\, 2$

$V = 2 \,.\, 6 \,.\, 2$

$V = 24\ m^3$

Observa-se que o volume da cisterna ficou reduzido a 80% da capacidade original, pois 24/30 = 0,80.

A área externa é igual a:

$A = 2 \,.\, (3{,}4 - 1) \,.\, 2 + 2 \,.\, (5{,}4 + 1) \,.\, 2$

$A = 2 \,.\, 2{,}4 \,.\, 2 + 2 \,.\, 6{,}4 \,.\, 2$

$A = 35{,}2\ m^2$

Desta forma, a área externa das paredes será igual à área externa das paredes da cisterna original.

III. Falsa

Se a largura for aumentada em um metro, o volume da cisterna será dado por:

$V = (3 + 1) \,.\, 5 \,.\, 2$

$V = 4 \,.\, 5 \,.\, 2$

$V = 40\ m^3$

Logo, tal volume não será maior que $40m^3$.

A área externa das paredes será dada por:

$A = 2 . (3{,}4 + 1) . 2 + 2 . 5{,}4 . 2$

$A = 2 . 4{,}4 . 2 + 2 . 5{,}4 . 2$

$A = 39{,}2\ m^2$

A área externa das paredes será inferior a $40\ m^2$.

IV. Falsa

Se o comprimento for aumentado em um metro, o volume da cisterna será dado por:

$V = 3 . (5 + 1) . 2$

$V = 3 . 6 . 2$

$V = 36\ m^3$

Neste caso, o volume aumentará em 20%, pois $1{,}2 . 30\ m^3 = 36\ m^3$.

A área externa das paredes será dada por:

$A = 2 . 3{,}4 . 2 + 2 . (5{,}4 + 1) . 2$

$A = 2 . 3{,}4 . 2 + 2 . 6{,}4 . 2$

$A = 39{,}2\ m^2$

A área externa das paredes não aumentará em 20%, pois $1{,}2 . 35{,}2\ m^2 \neq 39{,}2\ m^2$.

Resposta: b

14. Marcos comprou um novo computador para seus filhos, por R$ 1.215,00. O valor original de venda era maior, mas ele teve um desconto porque pagou à vista, em dinheiro. Analise as assertivas a seguir e assinale a alternativa **CORRETA**:

I. Se o desconto foi de 10%, ele correspondeu a R$ 135,00.
II. Se o desconto foi de 20%, o valor original era superior a R$ 1.500,00.
III. Se o desconto foi de 15%, o valor original era inferior a R$ 1.430,00.
IV. Se o desconto foi de 10%, o valor original era igual a R$ 1.336,50.

A) Somente a assertiva IV é verdadeira.
B) Somente a assertiva I é falsa.
C) Somente a assertiva IV é falsa.
D) Somente as assertivas II e III são verdadeiras.
E) Somente a assertiva I é verdadeira.

Resolução:

I. Verdadeira

Se o desconto foi de 10%, a quantia paga (R$ 1.215,00) corresponde a 90% do valor original. Logo, o desconto D, em reais, é dado por:

$$D = \frac{10\%}{90\%} . 1215{,}00 = 135{,}00$$

II. Verdadeira

Se o desconto foi de 20%, a quantia paga (R$ 1.215,00) corresponde a 80% do valor original. Assim, o valor original V, em reais, é dado por:

$$V = \frac{100\%}{80\%} . 1215{,}00 = 1518{,}75$$

Portanto, o valor original é superior a 1500 reais.

III. Verdadeira

Se o desconto foi de 15%, a quantia paga (R$ 1.215,00) corresponde a 85% do valor original. Ou seja, o valor original V, em reais, é dado por:

$$V = \frac{100\%}{85\%} . 1215{,}00 \cong 1429{,}42$$

Desta forma, o valor original é inferior a 1430 reais.

IV. Falsa

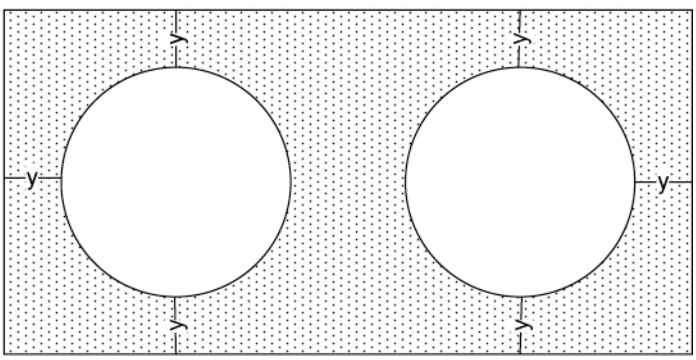
Se o desconto foi de 10%, a quantia paga (R$ 1.215,00) corresponde a 90% do valor original. Logo, o valor original V, em reais, é dado por:

$$V = \frac{100\%}{90\%} \,.\, 1215{,}00 = 1350{,}00$$

Ou seja, o valor original é diferente de R$ 1.336,50.

Resposta: c

15. Um tampo de pedra foi recortado de modo a acomodar duas cubas redondas. A figura a seguir ilustra a peça acabada.

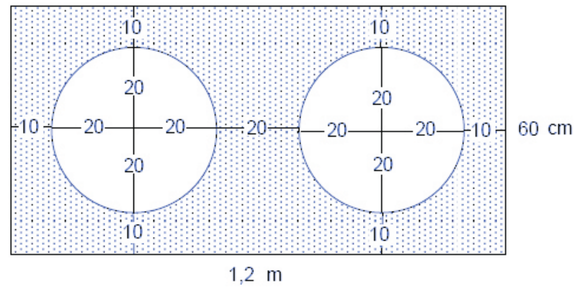


As dimensões externas do tampo são 1,2 m por 60 cm. Sabendo que, na peça, as medidas representadas por "y" valem 10 cm, qual a área resultante da peça pronta, após a retirada dos círculos indicados na figura?
(considerar π = 3,14)

A) Entre 0,45 m² e 0,5 m².
B) Entre 0,55 m² e 0,6 m².
C) Entre 0,7 m² e 0,75 m².
D) Entre 0,25 m² e 0,3 m².
E) Sem a distância entre os dois círculos não é possível fazer os cálculos.

Resolução:

A análise das medidas permite destacar a seguinte figura com algumas medidas já indicadas:



Área da peça inacabada:

$A = 1{,}2\text{ m} \,.\, 0{,}6\text{ m} = 0{,}72\text{ m}^2$

Área total dos dois círculos:

$A = 2 \,.\, \pi R^2$

$A = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, (0{,}2\text{ m})^2$

$A = 0{,}2512\text{ m}^2$

Área da peça pronta:

$A = 0{,}72 - 0{,}2512$

$A = 0{,}4688\text{ m}^2$

Observa-se que $0{,}45\text{ m}^2 < 0{,}4688\text{ m}^2 < 0{,}5\text{ m}^2$.

Resposta: a

16. Sejam $f(x) = x^3 + 8$ e $g(x) = x - 2$ duas funções reais. Definindo a função composta por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, então $(f \circ g)(t + 3)$ é igual a:

A) $(t+1)^3 + 2^3$
B) $(t+1)^3 + 2$
C) $(t-1)^3 + 2^3$
D) $(t-1)^3 - 2^3$
E) $(t+1)^3 - 2$

Resolução:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 + 8 = (x - 2)^3 + 8$

Fazendo x = t + 3, tem-se:

$(f \circ g)(t + 3) = (t + 3 - 2)^3 + 8$

$(f \circ g)(t + 3) = (t + 1)^3 + 2^3$

Resposta: a