

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



## COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A prova manteve a característica dos anos anteriores quanto à boa qualidade, contextualização e originalidade nos enunciados.

- **Boa abrangência:**

- 01) Funções (relação entre variáveis)
- 02) Geometria Plana (áreas e semelhanças entre figuras)
- 03) Funções Exponenciais e Logaritmos (equações e logaritmos decimais)
- 04) Geometria Plana, PG e Exponenciais
- 05) Geometria Espacial e Funções (área, volume, máximos/mínimos)
- 06) Geometria Analítica (reta, circunferência, área de triângulo)
- 07) Matrizes, Determinantes e Trigonometria (Sarrus, equação trigonométrica)
- 08) Análise Combinatória e Probabilidades (PFC)
- 09) Sistemas Lineares, Funções (solução de SL, função quadrática e analítica)
- 10) Geometria dos Sólidos e Funções (volume, semelhança e expressão algébrica)

Assuntos não relacionados:

- Números complexos
- Polinômios
- Equações Algébricas
- Binômio de Newton
- Progressão aritmética

- **Boa interação entre conteúdos**

Questões 03, 04, 05, 07, 08, 09 e 10 envolveram mais de um assunto.

- **Grau de dificuldade**

Uma prova de bom nível, dentro da expectativa de uma prova específica.

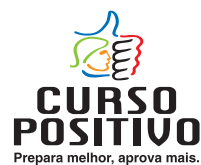
Parabéns à comissão.

Professores de Matemática do Curso Positivo.

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



01 - Sabe-se que a velocidade do som no ar depende da temperatura. Uma equação que relaciona essa velocidade  $v$  (em metros por segundo) com a temperatura  $t$  (em graus Celsius) de maneira aproximada é  $v = 20\sqrt{t+273}$ . Com base nessas informações, responda às seguintes perguntas:

a) Qual é a velocidade do som à temperatura de  $27^\circ\text{C}$ ? (Sugestão: use  $\sqrt{3} = 1,73$ )

**Comentário:**

A equação da velocidade é dada por:

$$v = 20\sqrt{t+273}$$

À temperatura de  $27^\circ\text{C}$ , a velocidade é dada por:

$$v = 20\sqrt{27+273}$$

$$v = 20\sqrt{300} = 20\sqrt{3 \cdot 10^2} = 200\sqrt{3} = 200 \cdot 1,73$$

$$v = 346 \text{ m/s}$$

Logo, à temperatura de  $27^\circ\text{C}$ , a velocidade é igual a 346 m/s.

b) Costuma-se assumir que a velocidade do som é de 340 m/s (metros por segundo). Isso ocorre a que temperatura?

**Comentário:**

A temperatura  $t$ , à velocidade do som, é dada por:

$$340 = 20\sqrt{t+273}$$

$$17 = \sqrt{t+273}$$

$$17^2 = (\sqrt{t+273})^2$$

$$289 = t + 273$$

$$t = 16^\circ\text{C}$$

**Portanto, a temperatura é igual a  $16^\circ\text{C}$ .**

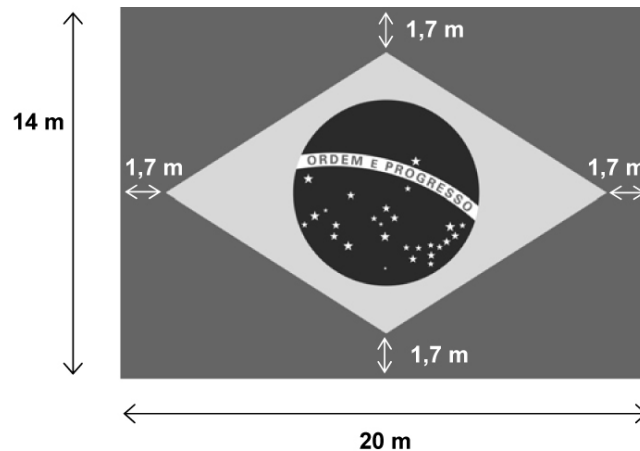
# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



02 - A bandeira do Brasil, hasteada na Praça dos Três Poderes, em Brasília, é uma das maiores bandeiras hasteadas do mundo. A figura abaixo indica as suas medidas de acordo com as normas oficiais.

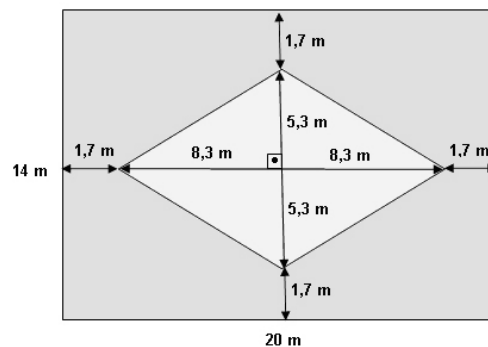


- a) Sabendo-se que o raio do círculo azul da bandeira da Praça dos Três Poderes mede 3,5 m, quanto mede a área da região amarela visível dessa bandeira? Sugestão: use  $\pi = 3,14$ .

**Comentário:**

**Solução:**

Pela simetria que se supõe existir na bandeira, a região amarela e o círculo azul da Praça dos Três Poderes, juntos, constituem um losango cujas diagonais maior (D) e menor (d) medem, respectivamente 16,6 m e 10,6 m.



A área de um losango é igual ao semiproducto das medidas das diagonais, ou seja:

$$S_{\text{Losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$S_{\text{Losango}} = \frac{16,6 \cdot 10,6}{2} = 87,98 \text{ m}^2$$

A medida da área do círculo azul é dada por:

$$S_{\text{Círculo}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{Círculo}} = 3,14 \cdot (3,5)^2 = 38,465 \text{ m}^2$$

A área amarela visível da bandeira é dada por:

$$S_{\text{amarela}} = S_{\text{Losango}} - S_{\text{Círculo}}$$

$$S_{\text{amarela}} = 87,98 - 38,465$$

$$S_{\text{amarela}} = 49,515 \text{ m}^2$$

Portanto, a área da região amarela visível dessa bandeira mede aproximadamente  $49,515 \text{ m}^2$ .

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



- b) Deseja-se construir uma bandeira do Brasil com o lado maior do retângulo medindo 2 m e nas mesmas proporções da bandeira da Praça dos Três Poderes. Qual será a medida da região amarela visível dessa outra bandeira?

### Comentário:

Seja  $S_1$  e  $S_2$  as áreas amarelas visíveis das bandeiras cujos lados maiores dos retângulos são iguais a 20 m e 2 m, respectivamente, pela razão de semelhança entre as medidas correspondentes, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{20}{2}\right)^2$$

$$\frac{49,515}{S_2} = (10)^2$$

$$S_2 = \frac{49,515}{100} = 0,49515 \text{ m}^2$$

Desta forma, a medida da região amarela visível dessa outra bandeira será igual a  $0,49515 \text{ m}^2$ .

### Observação:

Mesmo que a bandeira nacional seja extremamente conhecida, seria oportuno que o enunciado esclarecesse que as distâncias iguais a 1,7 m, indicadas na figura, correspondem às medidas existentes entre os pontos médios dos lados do retângulo e os vértices do quadrilátero que limita a região amarela, pois a área da região amarela pode variar de acordo com as posições dos pontos destacados em cada lado do retângulo.

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



03 - Suponha que o tempo  $t$  (em minutos) necessário para ferver água em um forno de micro-ondas seja dado pela função

$$t(n) = a \cdot n^b$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes e  $n$  o número de copos de água que se deseja aquecer.

- a) Com base nos dados da tabela ao lado, determine os valores de  $a$  e  $b$ .  
Sugestão: use  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,45$ .

Número de copos	Tempo de aquecimento
1	1 minuto e 30 segundos
2	2 minutos

**Comentário:**

- a) Para  $n = 1$ , verifica-se que  $t = 1,5$  minuto, logo:

$$t(n) = a \cdot n^b$$

$$t(1) = a \cdot 1^b$$

$$1,5 = a \cdot 1$$

$$a = 1,5$$

Para  $n = 2$  verifica-se que  $t = 2$  minutos:

$$t(n) = 1,5 \cdot n^b$$

$$t(2) = 1,5 \cdot 2^b$$

$$2 = \frac{3}{2} \cdot 2^b$$

$$\frac{2^2}{3} = 2^b$$

$$\log \left( \frac{2^2}{3} \right) = \log 2^b$$

$$\log 2^2 - \log 3 = b \cdot \log 2$$

$$2 \cdot \log 2 - \log 3 = b \cdot \log 2$$

$$2 \cdot 0,30 - 0,45 = b \cdot (0,30)$$

$$0,15 = 0,30b$$

$$b = 0,5$$

Portanto,  $a = 1,5$  e  $b = 0,5$ .

- b) Qual é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas?

Para  $n = 4$ , temos:

$$t(n) = 1,5 \cdot n^{0,5}$$

$$t(4) = 1,5 \cdot 4^{0,5}$$

$$t(4) = 1,5 \cdot (2^2)^{0,5}$$

$$t(4) = 1,5 \cdot 2^1$$

$$t(4) = 3$$

Assim, 3 minutos é o tempo necessário para se ferverem 4 copos de água nesse forno de micro-ondas.

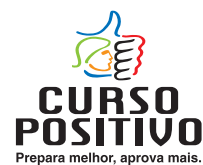
**Observação:**

É bastante incomum atribuir-se para  $\log 3$  o valor 0,45. Com 11 casas decimais de aproximação, o valor de  $\log 3$  é 0,47712125472. Existe, portanto, uma significativa diferença entre os valores.

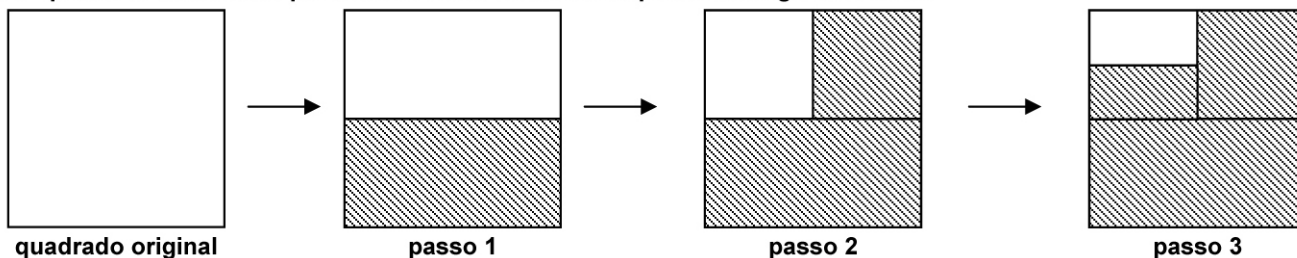
# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



04 - Um quadrado está sendo preenchido como mostra a sequência de figuras abaixo:



No passo 1, metade do quadrado original é preenchido. No passo 2, metade da área não coberta no passo anterior é preenchida. No passo 3, metade da área não coberta nos passos anteriores é preenchida, e assim por diante.

a) No passo 4, que percentual do quadrado original estará preenchido?

**Comentário:**

a) A medida da área não preenchida em cada passo segue uma progressão geométrica cuja razão é igual a  $1/2$ , de modo que:

Passo 1:  $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0,5$  da área do quadrado não é preenchida;

Passo 2:  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$  da área do quadrado não é preenchida;

Passo 3:  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$  da área do quadrado não é preenchida;

Passo 4:  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0,0625$  da área do quadrado não é preenchida.

Logo, após o passo 4, temos:

$$1 - 0,0625 = 0,9375 \text{ ou } 93,75\%$$

Logo, 93,75% do quadrado original estarão preenchidos.

b) Qual é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original seja preenchido?

**Comentário:**

Sendo  $x$  a ordem mínima do passo, para o qual 99,9% do quadrado original estejam preenchidos, temos:

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0,999$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 0,999 - 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 0,001$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{1000}$$

Atribuindo valores para  $x$ , temos

$$x = 9 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512} \leq \frac{1}{1000} \text{ (não satisfaz)}$$

$$x = 10 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000} \text{ (verifica)}$$

Assim, 10 é o número mínimo de passos necessários para que 99,9% do quadrado original sejam preenchidos.

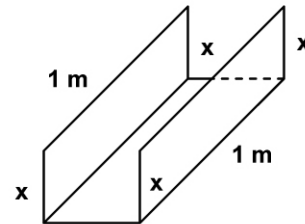
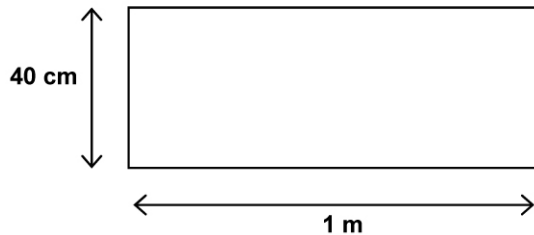
# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



- 05 - Uma calha será construída a partir de folhas metálicas em formato retangular, cada uma medindo 1 m por 40 cm. Fazendo-se duas dobras de largura  $x$ , paralelas ao lado maior de uma dessas folhas, obtém-se três faces de um bloco retangular, como mostra a figura da direita.



- a) Obtenha uma expressão para o volume desse bloco retangular em termos de  $x$ .

### Comentário:

Com as dobras, a base do bloco retangular (prisma) é um retângulo cujas dimensões são  $(40 - 2x)$  cm e 100 cm. A altura do bloco é igual a  $x$  cm. Logo, o volume, em  $\text{cm}^3$ , é dado por:

$$V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura})$$

$$V = (40 - 2x) \cdot 100 \cdot x$$

$$V(x) = -200x^2 + 4000x$$

Assim, o volume, em  $\text{cm}^3$ , é igual  $-200x^2 + 4000x$ .

- b) Para qual valor de  $x$  o volume desse bloco retangular será máximo?

### Comentário:

O valor de  $x$  para o qual o volume é máximo corresponde à abscissa do vértice da parábola que representa o gráfico do volume em função de  $x$ :

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{4000}{2 \cdot (-200)} = 10$$

Portanto, o volume desse bloco retangular será máximo para  $x = 10$  cm.

### Observação:

Não é usual o cálculo do volume de um bloco retangular que não se encontre inteiramente constituído.

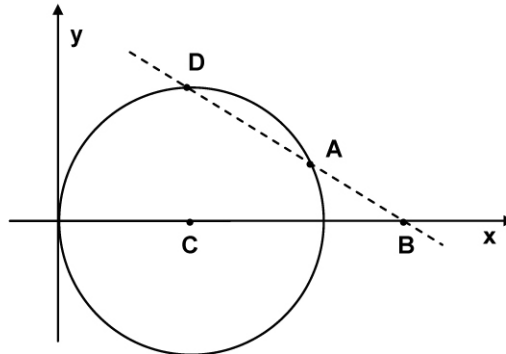
# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



06 - A figura abaixo mostra uma circunferência tangente ao eixo  $y$ , com centro  $C$  sobre o eixo  $x$  e diâmetro de 10 unidades.



a) Sabendo que  $A = (8,4)$  e que  $r : 3y + x = 20$  é a reta que passa por  $A$  e  $B$ , calcule a área do triângulo  $CAB$ .

**Comentário:**

a) O ponto  $B$  é o ponto em que  $r$  intersecta o eixo  $x$ , logo, a abscissa de  $B$  é dada por:

$$3y + x = 20$$

$$3 \cdot 0 + x = 20$$

$$x = 20$$

Desta forma,  $B = (20,0)$ . Se a circunferência tangencia o eixo  $y$  na origem e tem diâmetro 10, o centro tem coordenadas  $C = (5,0)$ . Se a base do triângulo  $ABC$  for o segmento  $\overline{BC}$  ( $BC = 15$ ), a altura correspondente terá como medida a ordenada do ponto  $A$ . Logo, a área do triângulo  $ABC$  será dada por:

$$S_{ABC} = \frac{(\text{base}) \cdot (\text{altura})}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{(15) \cdot (4)}{2} = 30 \text{ unidades de área}$$

b) Encontre as coordenadas do ponto  $D$ , indicado na figura acima, no qual a reta  $r$  intercepta a circunferência.

**Comentário:**

b) A equação reduzida da circunferência de centro  $C = (5,0)$  e raio 5 é:

$$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

Na equação da reta, isolando-se a variável  $x$ , temos:

$$3y + x = 20 \rightarrow x = 20 - 3y$$

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$$(x - 5)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

$$(20 - 3y - 5)^2 + y^2 = 25$$

$$(15 - 3y)^2 + y^2 = 25$$

$$225 - 90y + 9y^2 + y^2 = 25$$

$$10y^2 - 90y + 200 = 0$$

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos  $y = 4$  ou  $y = 5$ , então, substituindo em  $x = 20 - 3y$ , temos:

$$y = 4 \rightarrow x = 20 - 3 \cdot 4 = 8 \rightarrow A = (8, 4)$$

$$y = 5 \rightarrow x = 20 - 3 \cdot 5 = 5 \rightarrow D = (5, 5)$$

Portanto,  $D = (5, 5)$ .

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



07 - Considere a função  $f$  definida pela expressão

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(2x) & \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Calcule  $f(0)$  e  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

**Comentário:**

a) A função  $f$  é definida pelo determinante da matriz destacada. Resolvendo o determinante, temos:

$$f(x) = \cos(2x) - 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(2x) - \operatorname{sen}(2x)$$

Então:

$$f(0) = \cos(2 \cdot 0) - \operatorname{sen}(2 \cdot 0) = \cos(0) - \operatorname{sen}(0) = 1 - 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

b) Para quais valores de  $x$  se tem  $f(x) = 0$ ?

**Comentário:**

$$f(x) = 0$$

$$\cos(2x) - \operatorname{sen}(2x) = 0$$

$$\cos(2x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = 1$$

$$\operatorname{tg}(2x) = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

Assim, o conjunto solução da equação  $f(x) = 0$  é dado por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

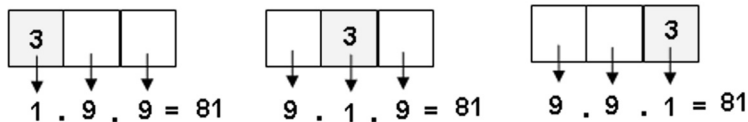


08 - Um cadeado com segredo possui três engrenagens, cada uma contendo todos os dígitos de 0 a 9. Para abrir esse cadeado, os dígitos do segredo devem ser colocados numa sequência correta, escolhendo-se um dígito em cada engrenagem. (Exemplos: 237, 366, 593...)

- a) Quantas possibilidades diferentes existem para a escolha do segredo, sabendo que o dígito 3 deve aparecer obrigatoriamente e uma única vez?

### Comentário:

O algarismo 3 deve aparecer uma única vez, podendo ser na ordem das centenas, das dezenas ou das unidades:



Logo, o número de possibilidades para a escolha do segredo é igual a:

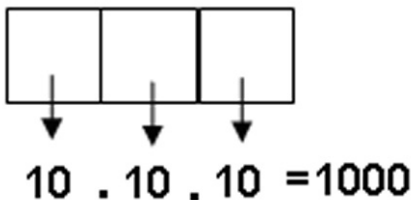
$$81 + 81 + 81 = 81 \cdot 3 = 243$$

Existem 243 maneiras possíveis para a escolha do segredo, se o algarismo 3 aparecer uma única vez.

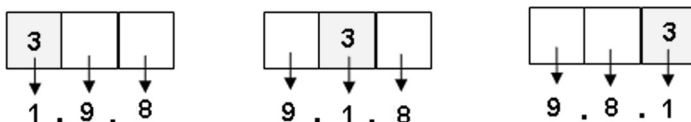
- b) Qual é a probabilidade de se escolher um segredo no qual todos os dígitos são distintos e o dígito 3 aparece obrigatoriamente?

### Comentário:

b) A quantidade total de segredos (espaço amostral) é dada por:



- A quantidade de segredos cujos algarismos sejam distintos e o algarismo 3 apareça (número de situações favoráveis) é dada por:



- Logo, o número de possibilidades para a escolha do segredo é igual a:

$$72 + 72 + 72 = 216$$

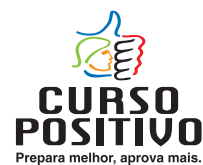
Portanto, a probabilidade  $p$  é

$$p = \frac{216}{1000} = 0,216 \text{ ou } p = 21,6\%$$

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



09 - Uma parábola é o gráfico de uma função da forma  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ .

- a) Encontre a função cujo gráfico é a parábola que contém os pontos  $P = (-1, 2)$ ,  $Q = (1, 2)$  e  $R = (2, 5)$ .  
Sugestão: utilize os pontos dados para construir um sistema linear.

**Comentário:**

a) Utilizando as coordenadas dos pontos P, Q e R, temos:

$$2 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \rightarrow a - b + c = 2 \text{ (I)}$$

$$2 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + c \rightarrow a + b + c = 2 \text{ (II)}$$

$$5 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + c \rightarrow 4a + 2b + c = 5 \text{ (III)}$$

Fazendo (II) - (I), temos:

$$2b = 0 \rightarrow b = 0$$

Fazendo (III) - (I), temos:

$$3a + 3b = 3 \rightarrow 3a + 3 \cdot 0 = 3 \rightarrow a = 1$$

Substituindo  $a = 1$  e  $b = 0$  em (I), temos:

$$1 - 0 + c = 2 \rightarrow c = 1$$

Logo, a função cujo gráfico contém os pontos P, Q e R tem a forma  $y = x^2 + 1$ .

- b) Existe uma parábola que contém os pontos  $P = (-1, -1)$ ,  $Q = (1, 3)$  e  $R = (2, 5)$ ? Justifique.

**Comentário:**

$$P(-1, -1) \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = -1 \therefore a(-1)^2 + b(-1) + c = -1$$

$$Q(1, 3) \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 3 \therefore a(1)^2 + b(1) + c = 3$$

$$R(2, 5) \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 5 \therefore a(2)^2 + b(2) + c = 5$$

$$\begin{cases} a - b + c = -1 & \text{(I)} \\ a + b + c = 3 & \text{(II)} \\ 4a + 2b + c = 5 & \text{(III)} \end{cases}$$

Fazendo (II) - (I), temos

$$2b = 4 \therefore b = 2$$

Fazendo (III) - (II), temos

$$3a + b = 2$$

substituindo  $b = 2$ , vem

$$3a = 0 \therefore a = 0$$

substituindo  $a = 0$ ,  $b = 2$  em (I), tem-se

$$0 - 2 + c = -1 \therefore c = 1$$

**Portanto  $f(x) = 2x + 1$  que é a equação de uma reta.**

**Resposta: Não existe a parábola passando pelos pontos dados pois esses pontos pertencem a uma reta, ou seja, estão alinhados.**

Outra maneira:

Observe que os pontos P, Q e R estão alinhados uma vez que:

$$\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-1 - 3}{-1 - 1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\frac{y_Q - y_R}{x_Q - x_R} = \frac{3 - 5}{1 - 2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Assim, não existe parábola que passe simultaneamente por P, Q e R.

# PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO

Vestibular UFPR 2009/2010 - 2ª Fase

MATEMÁTICA



10 - A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.

a) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?

**Comentário:**

A parte superior da taça corresponde a um cone reto cujo raio da base é igual a 2 cm e cuja altura é igual a 12 cm. Logo, o volume é dado por:

$$V_{\text{taça}} = \frac{1}{3} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

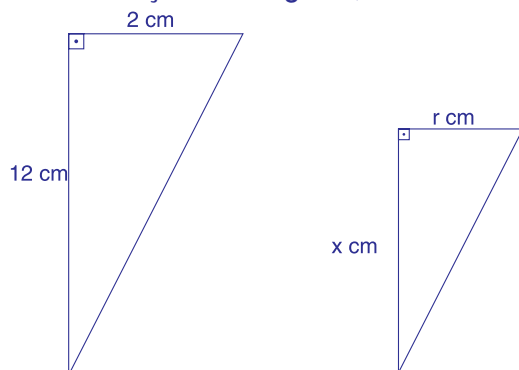
$$V_{\text{taça}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 12$$

$$V_{\text{taça}} = 16\pi \text{ cm}^3$$

b) Obtenha uma expressão para o volume  $V$  de líquido nessa taça, em função da altura  $x$  indicada na figura.

**Comentário:**

Pela semelhança de triângulos, conforme a figura



em que  $r$  é o raio da base do cone que representa o líquido da taça

$$\frac{x}{12} = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{x}{6}$$

Assim, o volume  $V$  de líquido da taça, em função da altura  $x$ , em cm, é dado por:

$$V_{\text{líquido}} = \frac{1}{3} \cdot (\text{base}) \cdot (\text{altura})$$

$$V_{\text{líquido}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{x}{6}\right)^2 \cdot x$$

$$V_{\text{líquido}} = \frac{x^3}{108} \pi \text{ cm}^3, 0 \leq x \leq 12$$

Obs.: também seria possível resolver o item **b** pela relação direta  $\frac{V_T}{V_P} = \frac{H^3}{h^3}$

