

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

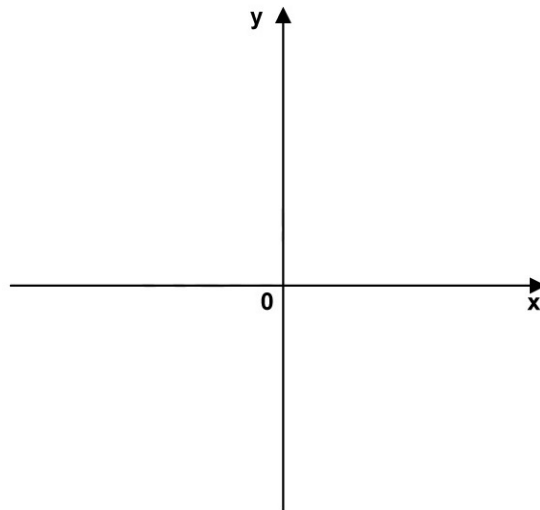
COMENTÁRIO DA PROVA DE MATEMÁTICA

A UFPR manteve a característica de apresentar questões bem montadas, bem contextualizadas e de qualidade.

Um único senão está na contemplação do programa que, ao nosso ver, deixou de lado temas clássicos como Estatística, Geometria Analítica, Análise combinatória, Binômio de Newton, Números Complexos e Sistemas Lineares. No resto, uma prova que vai premiar os alunos que se dedicaram, mantendo o padrão de qualidade dos anos anteriores.

Professores de Matemática do Curso Positivo.

01 - Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \frac{2}{3}(x - 1)(x - 2)$.



a) Esboce o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ no sistema cartesiano ao lado.

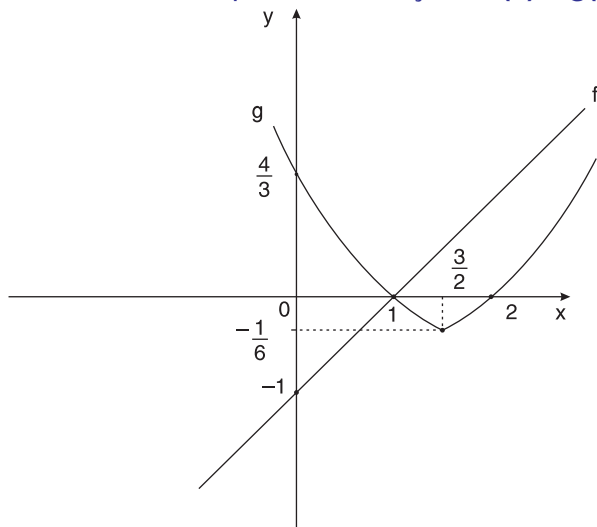
Comentário:

A função f é afim. Logo, seu gráfico é representado por uma reta.

Além disso, $f(0) = -1$ e $f(1) = 0$.

A função g é quadrática. O gráfico de g é representado por uma parábola com concavidade voltada para cima, cujos zeros são 1 ou 2. Por outro lado, $g(0) = \frac{4}{3}$ e $g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{6}$.

Desta forma, um possível esboço de $f(x)$ e $g(x)$ no sistema cartesiano dado pode ser:



- b) Calcule as coordenadas (x,y) dos pontos de interseção dos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$.

$$g(x) = f(x)$$

$$\frac{2}{3}(x-1)(x-2) = (x-1)$$

$$\frac{2}{3}(x-1)(x-2) - (x-1) = 0$$

$$(x-1) \cdot \left[\frac{2}{3}(x-2) - 1 \right] = 0$$

$$\frac{1}{3} \cdot (x-1) \cdot (2x-7) = 0$$

$$x-1 = 0 \text{ ou } 2x-7 = 0$$

$$x = 1 \text{ ou } x = \frac{7}{2}$$

Substituindo os valores de x na função f , por exemplo, tem-se:

$$f(1) = 0 \text{ e } f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

Portanto, as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos de f e g são $(1; 0)$ e $\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

02 - Uma caixa contém 7 lápis azuis, 5 vermelhos e 9 amarelos. Sabendo que a caixa contém somente esses lápis, responda:

- a) Qual o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado 4 lápis de uma mesma cor? Justifique sua resposta.

Comentário:

Como são 3 cores, é possível, em 9 lápis retirados, obtermos 3 lápis azuis, 3 vermelhos e 3 amarelos. Logo, não podemos estar certos de que, com 9 lápis retirados, teríamos 4 lápis de uma mesma cor. Entretanto, como não há mais cores, em 10 lápis retirados, certamente ao menos 4 deles possuiriam a mesma cor. Portanto, o número mínimo de lápis que devemos retirar (sem olhar a cor) para que estejamos certos de haver retirado, no mínimo, 4 lápis de uma mesma cor, é igual a 10.

- b) Se retirarmos ao acaso 3 lápis dessa caixa (sem olhar a cor), qual é a probabilidade de que todos sejam da cor amarela?

Comentário:

A probabilidade de que todos os 3 lápis retirados sejam amarelos é dada por:

$$p = \frac{9}{21} \cdot \frac{8}{22} \cdot \frac{7}{19} = \frac{6}{95}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

03 - Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma função do primeiro grau.

- a) Determine essa função do primeiro grau, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40 cm e sua altura era 1,90 m, e o úmero de seu assistente media 30 cm e sua altura era 1,60 m.

Comentário:

Uma função definida por um polinômio do 1º grau é denominada função afim. A lei de associação da função afim solicitada tem a forma $y = ax + b$, em que y é a medida da altura e x é a medida do comprimento do úmero, ambos em cm.

Para $x = 40$, tem-se $y = 190$, então substituindo estes valores na função afim, tem-se:

$$190 = 40a + b \quad (I)$$

Para $x = 30$ tem-se $y = 160$, então:

$$160 = 30a + b \quad (II)$$

Fazendo (I) – (II), tem-se:

$$30 = 10a$$

$$a = 3$$

Substituindo $a = 3$ em (II), tem-se:

$$160 = 30 \cdot 3 + b$$

$$b = 70$$

Logo, a lei de associação da função afim é dada por $y = 3x + 70$, com $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

- b) Se o úmero encontrado no sítio arqueológico media 32 cm, qual era a altura aproximada do indivíduo que possuía esse osso?

Comentário:

Substituindo x por 32 na função $y = 3x + 70$, temos:

$$y = 3 \cdot 32 + 70$$

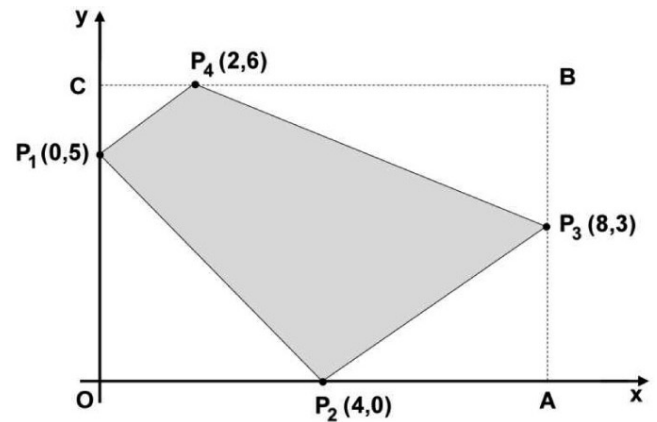
$$y = 96 + 70$$

$$y = 166$$

$$y = 1,66 \text{ m}$$

Portanto, a altura do indivíduo é 1,66 m.

04 - Calcule a área do quadrilátero $P_1P_2P_3P_4$, cujas coordenadas cartesianas são dadas na figura ao lado.



Comentário:

1º modo

A medida da área do quadrilátero, representada por S , é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} |44|$$

$$S = 22 \text{ unidades de área}$$

2º modo

A área do quadrilátero também poderia ser obtida retirando-se do retângulo OABC quatro triângulos retângulos:

$$S = S_{OABC} - S_{OP_1P_2} - S_{AP_2P_3} - S_{BP_3P_4} - S_{CP_1P_4}$$

$$S = 8 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 5}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{6 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2}$$

$$S = 48 - 10 - 6 - 9 - 1$$

$$S = 22 \text{ unidades de área}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

05 - A tela de uma TV está no formato *widescreen*, no qual a largura e a altura estão na proporção de 16 para 9. Sabendo que a diagonal dessa tela mede 37 polegadas, qual é sua largura e a sua altura, em centímetros?

(Para simplificar os cálculos, use as aproximações $\sqrt{337} \approx 18,5$ e 1 polegada $\approx 2,5$ cm)

Comentário:

Seja L e H a largura e a altura, respectivamente, temos:

$$\frac{L}{16} = \frac{H}{9} = x \text{ (x é a constante de proporcionalidade)}$$

$$L = 16x \text{ e } H = 9x$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$37^2 = (9x)^2 + (16x)^2$$

$$37^2 = 337x^2$$

$$x = \frac{\sqrt{37^2}}{\sqrt{337}} \approx \frac{37}{18,5} = 2$$

Logo, pode-se concluir corretamente que:

- Largura: $16 \cdot 2 \cdot 2,5 = 80$ cm
- Altura: $9 \cdot 2 \cdot 2,5 = 45$ cm

Assim, a largura e a altura medem, respectivamente, 80 cm e 45 cm.

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

06 - Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, $P(t)$, de determinada espécie numa área de proteção ambiental:

$$P(t) = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}, \text{ sendo } t \text{ o tempo em anos e } t = 0 \text{ o momento em que o estudo foi iniciado.}$$

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos?

Comentário:

Para $P(t) = 400$, tem-se:

$$P(t) = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}$$

$$400 = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}$$

$$1 + 2^{2-t} = \frac{500}{400}$$

$$2^{2-t} = \frac{5}{4} - 1$$

$$2^{2-t} = 2^{-2}$$

$$2 - t = -2$$

$$t = 4$$

Logo, em 4 anos a população chegará a 400 indivíduos.

b) À medida que o tempo t aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta.

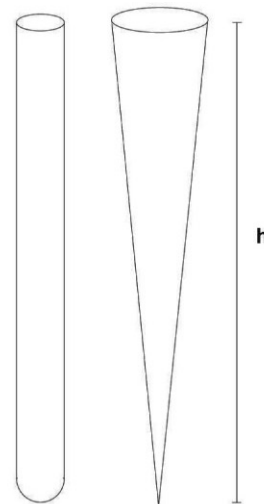
Comentário:

À medida que t aumenta, o valor de 2^{2-t} tende a zero. Desta forma, $P(t)$ tenderá a:

$$\frac{500}{1+0} = 500$$

Ou seja, o número de pássaros se aproxima de 500 indivíduos.

07 - Num laboratório há dois tipos de recipientes, conforme a figura ao lado. O primeiro, chamado de “tubo de ensaio”, possui internamente o formato de um cilindro circular reto e fundo semiesférico. O segundo, chamado de “cone de Imhoff”, possui internamente o formato de um cone circular reto.



- a) Sabendo que o volume de um cone de Imhoff, com raio da base igual a 2 cm, é de 60 ml, calcule a altura h desse cone.

Comentário:

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$60 = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot h$$

$$h = \frac{45}{\pi} \text{ cm}$$

- b) Calcule o volume (em mililitros) do tubo de ensaio com raio da base medindo 1 cm e que possui a mesma altura h do cone de Imhoff.

Comentário:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot (h - r) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$V = \pi \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{45}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3$$

$$V = 45 - \pi + \frac{2}{3} \pi$$

$$V = 45 - \frac{\pi}{3} \text{ mL}$$

$$V = \frac{135 - \pi}{3} \text{ mL}$$

08 - Suponha que, durante um certo período do ano, a temperatura T , em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $F(t) = 21 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, sendo t o tempo em horas medido a partir das 06h00 da manhã.

a) Qual a variação de temperatura num período de 24 horas?

Comentário:

A temperatura máxima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$, ou seja:

$$F(t) = 21 - 4 \cdot (-1) = 25^{\circ}\text{C} \rightarrow T = 25^{\circ}\text{C}$$

A temperatura mínima ocorre quando $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$, ou seja:

$$F(t) = 21 - 4 \cdot (1) = 17^{\circ}\text{C} \rightarrow T = 17^{\circ}\text{C}$$

Logo, a variação é de 17°C a 25°C .

b) A que horas do dia a temperatura atingirá 23°C ?

Comentário:

$$F(t) = 23^{\circ}\text{C}$$

$$23 = 21 - 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

$$4 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{12}t = \frac{4\pi}{3}$$

$$t = 8\text{h ou } t = 16\text{h}$$

Como o tempo foi medido a partir das 06h00 da manhã, os horários em que a temperatura atingirá 23°C , respectivamente, 8 horas e 16 horas após às 06h 00m da manhã, serão:

$$6 + 8 = 14\text{h } 00\text{m}$$

$$6 + 16 = 22\text{h } 00\text{m}$$

PROVA COMENTADA PELOS PROFESSORES DO CURSO POSITIVO



Vestibular UFPR 2011/2012 - 2ª Fase

MATEMÁTICA

09 - Uma quantia inicial de R\$ 1.000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? (Use $\log_2(1,06) \approx 0,084$.)

Comentário:

O montante M produzido por um capital C , durante o tempo t a uma taxa de juros compostos i , ambos na mesma unidade de tempo, é dado por:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Para que o Capital inicial de R\$ 1.000,00 dobre, o tempo necessário t , em anos, é dado por:

$$2000 = 1000 \cdot (1 + 0,06)^t$$

$$2 = (1,06)^t$$

Tomando o logaritmo na base 2 a ambos os membros, tem-se:

$$\log_2 2 = \log_2 (1,06)^t$$

$$1 = t \cdot \log_2 1,06$$

$$1 \approx t \cdot 0,084$$

$$t \approx \frac{1}{0,084} = \frac{1000}{84}$$

$$t \approx 11,9 \text{ anos}$$

Portanto, em aproximadamente 12 anos o capital irá duplicar.

10 - Considere o polinômio $p(x) = \begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Calcule as raízes de $p(x)$. Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

Comentário:

A notação do polinômio $p(x)$ está incorreta. A correta para representar o determinante deve ser:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

1ª solução:

Resolvendo o determinante pela regra de Sarrus, tem-se:

$$p(x) = -9x - 9x - 4x^2 + x^3 + 36 + 9x$$

$$p(x) = x^3 - 4x^2 - 9x + 36$$

$$p(x) = x^2 \cdot (x - 4) - 9(x - 4)$$

$$p(x) = (x - 4) \cdot (x^2 - 9)$$

$$p(x) = (x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$$

$$p(x) = 0 \rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 4$$

2ª solução:

Para $x = 3$, a primeira e a segunda colunas do determinante são iguais, da mesma forma que a primeira e a terceira linhas:

$$p(3) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Para $x = -3$, tanto a primeira e a segunda colunas do determinante são opostas, quanto a primeira e a terceira linhas:

$$p(-3) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Para $x = 4$, a segunda e a terceira colunas do determinante são opostas, além de a primeira e a segunda linhas serem iguais:

$$p(4) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Em todas essas situações o determinante é nulo, ou seja, $p(3) = p(-3) = p(4) = 0$.

Portanto, as raízes de $p(x)$ são 3, -3 ou 4.

3ª solução:

Calculando o determinante, usando o teorema de Jacobi, a saber: multiplicando a primeira coluna por 1 e somando à segunda coluna, o determinante não se altera, temos:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x+3 & -x \\ 3 & x+3 & -4 \\ x & x+3 & -3 \end{vmatrix}$$

dividindo a segunda coluna por $(x + 3)$ e multiplicando o determinante por $(x + 3)$, vem:

$$p(x) = (x + 3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -x \\ 3 & 1 & -4 \\ x & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Teorema de Jacobi: multiplicando a primeira linha por (-1) e somando à segunda linha, o determinante não se altera, temos:

$$p(x) = (x + 3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -x \\ 0 & 0 & x-4 \\ x & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

calculando o determinante pelo teorema de Laplace, vem:

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x - 4) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$$p(x) = (x + 3) \cdot (x - 4) \cdot (-1) \cdot (3 - x)$$

igualando a zero, temos as raízes:

$$x + 3 = 0 \quad \therefore \quad x = -3$$

$$x - 4 = 0 \quad \therefore \quad x = 4$$

$$3 - x = 0 \quad \therefore \quad x = 3$$

Resposta: As raízes de $p(x)$ são: -3 e 3 e 4 .